

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Зулпукаров Ж.А.¹, Алиева Ж.А.²

¹Зулпукаров Жакишылык Алибаевич – кандидат физико-математических наук, доцент,
кафедра прикладная математика и информатика

Ошский технологический университет,

²Алиева Жаркынай Анарбаевна - магистр,
кафедра высшая математика и методы преподавания математика,

Ошский государственный педагогический университет,

г. Ош, Кыргызстан

Аннотация: в данной работе рассматриваются вопросы регуляризации и единственности решений вырождающихся систем дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Исследуются особенности поведения решений в областях вырождения коэффициентов, а также анализируются условия, при которых обеспечивается их корректность и единственность. Особое внимание уделяется методам регуляризации, позволяющим преодолеть трудности, связанные с вырождением. Полученные результаты имеют теоретическое значение и могут быть применены при решении задач математической физики и смежных областей науки.

Ключевые слова: матричная функция, вектор-функция, интегральные уравнения, область, интегрирования по частям.

ON THE REGULARIZATION AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS OF DEGENERATE SYSTEMS OF SECOND-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES

Zulpukarov Zh.A.¹, Alieva Zh.A.²

¹Zulpukarov Zhakshylyk Alibaevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS AND INFORMATICS,
OSH TECHNOLOGICAL UNIVERSITY,

²Alieva Zharkynai Anarbaevna – Master's Degree Holder,
DEPARTMENT OF HIGHER MATHEMATICS AND METHODS OF TEACHING MATHEMATICS,
OSH STATE PEDAGOGICAL UNIVERSITY,
OSH, KYRGYZSTAN

Abstract: This work addresses the issues of regularization and uniqueness of solutions for degenerate systems of second-order partial differential equations with two independent variables. The study examines the specific behavior of solutions in regions where the coefficients degenerate and analyzes the conditions that ensure their well-posedness and uniqueness. Special attention is given to regularization methods that help overcome the difficulties associated with degeneration. The obtained results have theoretical significance and can be applied to solving problems in mathematical physics and related scientific fields.

Keywords: matrix function, vector function, integral equations, domain, integration by parts.

УДК 517.968

Введение. В современной математике важное место занимает теория дифференциальных уравнений в частных производных, особенно задачи, связанные с вырождающимися системами второго порядка. Такие системы возникают в различных прикладных областях, включая математическую физику, механику и другие науки. Вырождение коэффициентов существенно усложняет анализ решений, поскольку нарушаются стандартные условия существования и единственности. В связи с этим особую актуальность приобретают методы регуляризации, позволяющие корректно исследовать поведение решений [4,5]. Настоящая работа посвящена изучению вопросов регуляризации и установлению условий единственности решений для рассматриваемого класса систем с двумя независимыми переменными [1-3].

Основная часть. Рассмотрим систему

$$A(t, x)u_t + B(t, x)u_x + C(t, x)u = f(t, x), \quad (1)$$

$$u(0, x) = 0, \quad x \in [0; X],$$

$$u(t, 0) = 0, \quad t \in [0; T], \quad (2)$$

где $A(t, x), B(t, x), C(t, x)$ - самосопряженные заданные матричные функции размеров $n \times n$, а $f(t, x)$ - заданная, $u(t, x)$ - неизвестная вектор-функции,

$$G = \{(t, x, y) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X\}.$$

Обозначим $Z_{2,n}(G)$ - пространство всех вектор-функций, таких что компоненты каждого из векторов $u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x)$ из $L_2(G)$, т. е. $u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x) \in L_{2,n}(G)$.

Символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будет означать скалярное произведение. Делаем следующую подстановку

$$u(t, x) = \int_0^t \int_0^x \mathcal{G}(s, z) dz ds, \quad (t, x) \in G \quad (3)$$

Тогда задача (1)-(2) приводится к эквивалентной ей системе интегральных уравнений первого рода следующего вида

$$A(t, x) \int_0^x \mathcal{G}(t, z) dz + B(t, x) \int_0^t \mathcal{G}(s, x) ds + C(t, x) \int_0^t \int_0^x \mathcal{G}(s, z) dz ds = f(t, x). \quad (4)$$

Обе части уравнения (4) скалярно умножим на вектор $\mathcal{G}(t, x, y)$ и интегрируем по области $G_{tx} = \{(s, z) : 0 \leq s \leq t, 0 \leq z \leq x\}$

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^x \int_0^z \langle A(s, z) \mathcal{G}(s, \xi), \mathcal{G}(s, z) \rangle d\xi dz ds + \int_0^t \int_0^x \int_0^s \langle B(s, z) \mathcal{G}(\tau, z), \mathcal{G}(s, z) \rangle d\tau dz ds + \\ & + \int_0^t \int_0^x \int_0^s \int_0^z \langle C(s, z) \mathcal{G}(\tau, \xi), \mathcal{G}(s, z) \rangle d\xi d\tau dz ds = \int_0^t \int_0^x \langle f(s, z), \mathcal{G}(s, z) \rangle dz ds. \quad (5) \end{aligned}$$

Применяя метод интегрирования по частям и учитывая выражение

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^z \mathcal{G}(s, \xi) d\xi = \mathcal{G}(s, z), \quad \text{получаем, что первое слагаемое левой части системы (5)}$$

преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^x \int_0^z \langle A(s, z) \mathcal{G}(s, \xi), \mathcal{G}(s, z) \rangle d\xi dz ds = \frac{1}{2} \int_0^t \langle A(s, x) \int_0^x \mathcal{G}(s, \xi) d\xi, \int_0^x \mathcal{G}(s, \xi) d\xi \rangle ds - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x \langle A'_z(s, z) \int_0^z \mathcal{G}(s, \xi) d\xi, \int_0^z \mathcal{G}(s, \xi) d\xi \rangle dz ds. \quad (6) \end{aligned}$$

Аналогично, для второго слагаемого получим

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^x \int_0^s \langle B(s, z) \mathcal{G}(\tau, z), \mathcal{G}(s, z) \rangle d\tau dz ds = \frac{1}{2} \int_0^x \langle B(t, z) \int_0^t \mathcal{G}(\tau, z) d\tau, \int_0^t \mathcal{G}(\tau, z) d\tau \rangle dz - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x \langle B'_s(s, z) \int_0^s \mathcal{G}(\tau, z) d\tau, \int_0^s \mathcal{G}(\tau, z) d\tau \rangle dz ds. \quad (7) \end{aligned}$$

Заметим, что выполняется соотношение $\frac{\partial^2}{\partial z \partial s} \int_0^s \int_0^z \mathcal{G}(\tau, \xi) d\xi d\tau = \mathcal{G}(s, z)$ Тогда, применяя метод

интегрирования по частям, третье слагаемое левой части системы (5) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^x \int_0^s \int_0^z \langle C(s, z) \mathcal{G}(\tau, \xi) \mathcal{G}(s, z) \rangle d\xi d\tau dz ds = \frac{1}{2} \langle C(t, x) \int_0^t \int_0^x \mathcal{G}(\tau, \xi) d\xi d\tau, \int_0^t \int_0^x \mathcal{G}(\tau, \xi) d\xi d\tau \rangle - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^x \langle C'_z(t, z) \int_0^t \int_0^z \mathcal{G}(\tau, \xi) d\xi d\tau, \int_0^t \int_0^z \mathcal{G}(\tau, \xi) d\xi d\tau \rangle dz - \frac{1}{2} \int_0^t \langle C'_s(s, x) \int_0^s \int_0^x \mathcal{G}(\tau, \xi) d\xi d\tau, \int_0^s \int_0^x \mathcal{G}(\tau, \xi) d\xi d\tau \rangle ds \end{aligned}$$

$$\int_0^t \int_0^z \mathcal{G}(\tau, \xi) d\xi d\tau \rangle ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x \langle C''_{sz}(s, z) \int_0^s \int_0^z \mathcal{G}(\tau, \xi) d\xi d\tau, \int_0^s \int_0^z \mathcal{G}(\tau, \xi) d\xi d\tau \rangle dz ds. \quad (8)$$

Выражения (6)-(8) подставляя в (5), интегрируя, по области G_{tx} и применив формулу Дирихле, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x \langle \langle (t-s)[A(s, z) - (x-z)A'_z(s, z)] \int_0^z \mathcal{G}(s, \xi) d\xi, \int_0^z \mathcal{G}(s, \xi) d\xi \rangle + \\ & + \langle (x-z)[B(s, z) - (t-s)B'_s(s, z)] \int_0^s \mathcal{G}(\tau, z) d\tau, \int_0^s \mathcal{G}(\tau, z) d\tau \rangle + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x \{ [C(s, z) - (x-z)C'_z(s, z) - (t-s)C'_s(s, z) + (t-s)(x-z)C''_{sz}(s, z)] \times \\ & \times \int_0^s \int_0^z \mathcal{G}(\tau, \xi) d\xi d\tau, \int_0^s \int_0^z \mathcal{G}(\tau, \xi) d\xi d\tau \} dz ds = \int_0^t \int_0^x \int_0^y \int_0^s \langle f(\tau, \xi), \mathcal{G}(\tau, \xi) \rangle d\xi d\tau dz ds. \quad (9) \end{aligned}$$

Предполагаем выполнение следующих условий:

а) $A'_x(t, x)$, $B'_t(t, x)$, $C''_{tx}(t, x)$ - непрерывные матричные функции в области G ;

б) Для любых $(t, x) \in G$, $(s, z) \in G_{tx} = \{(s, z): 0 \leq s \leq t, 0 \leq z \leq x\}$ и для векторов $u, \mathcal{G} \in R^n$ справедливо

$$\langle (t-s)[A(s, z) - (x-z)A'_z(s, z)]u, u \rangle + \langle (x-z)[B(s, z) - (t-s)B'_s(s, z)]\mathcal{G}, \mathcal{G} \rangle \geq 0$$

в) Для любых $(t, x) \in G$, $(s, z) \in G_{tx}$ для вектора $u \in R^n$ справедливо

$$\langle [C(s, z) - (t-s)C'_s(s, z) - (x-z)C'_z(s, z) + (t-s)(x-z)C''_{sz}(s, z)]u, u \rangle \geq K \langle u, u \rangle,$$

где K - некоторое положительное число.

В таких предположениях из (9) имеем

$$\frac{K}{2} \int_0^t \int_0^x \left\langle \int_0^s \int_0^z \mathcal{G}(\tau, \xi) d\xi d\tau, \int_0^s \int_0^z \mathcal{G}(\tau, \xi) d\xi d\tau \right\rangle dz ds \leq \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^y \int_0^s \langle f(\tau, \xi), \mathcal{G}(\tau, \xi) \rangle d\xi d\tau dz ds \right| \quad (10)$$

Пусть $f(t, x) = 0$, при $(t, x) \in G$. Тогда из (10) вытекает $\int_0^s \int_0^z \mathcal{G}(\tau, \xi) d\xi d\tau = 0$ при $(t, x) \in G$ т.е.

$\mathcal{G}(t, x)$ - нуль вектор. Таким образом, доказана следующая.

Теорема 1. Пусть выполняются условия а), б) и в). Тогда решение $\mathcal{G}(t, x)$ системы (4) единственно в классе $L_{2,n}(G)$. Следовательно, решение $u(t, x)$ задачи (1)-(2) единственно в пространстве $Z_{2,n}(G)$.

Далее, наряду с задачей (1)-(2) рассмотрим задачу

$$\varepsilon u_{\varepsilon x} + A(t, x)u_{\varepsilon} + B(t, x)u_{\varepsilon} + C(t, x)u_{\varepsilon} = f(t, x), \quad (11)$$

$$u_{\varepsilon}(0, x) = 0, \quad x \in [0; X],$$

$$u_{\varepsilon}(t, 0) = 0, \quad t \in [0; T] \quad (12)$$

где $0 < \varepsilon$ - малый параметр.

Решение задачи (15)-(16) будем искать в виде

$$u_{\varepsilon}(t, x) = u(t, x) + \xi_{\varepsilon}(t, x) \quad (13)$$

где $u(t, x)$ - решение задачи (1)-(2).

Подставляя (13) в (11) получим

$$\varepsilon \xi_{\varepsilon x} + A(t, x)\xi_{\varepsilon} + B(t, x)\xi_{\varepsilon} + C(t, x)\xi_{\varepsilon} = -\varepsilon u_{tx}(t, x)$$

При помощи подстановки $\xi_{\varepsilon}(t, x) = \int_0^t \int_0^x \psi_{\varepsilon}(s, z) dz ds$, последнюю систему сводим к системе

интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$\begin{aligned} & \varepsilon \psi_\varepsilon(t, x) + A(t, x) \int_0^x \psi_\varepsilon(t, z) dz + B(t, x) \int_0^t \psi_\varepsilon(s, x) ds + \\ & + C(t, x) \int_0^t \int_0^x \psi_\varepsilon(s, z) dz ds = -\varepsilon u(t, x). \end{aligned} \quad (15)$$

Обе части системы (15) скалярно умножим на вектор $\psi_\varepsilon(t, x)$ и дважды интегрируем по области G_{tx} . При этом, используя метод интегрирования по частям и формулу Дирихле, получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_0^t \int_0^x \int_0^s \int_0^z \langle \psi_\varepsilon(\tau, \xi), \psi_\varepsilon(\tau, \xi) \rangle d\xi d\tau dz ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x \{ \langle (t-s)[A(s, z) - (x-z)A'_z(s, z)] \times \\ & \times \int_0^z \psi_\varepsilon(s, \xi) d\xi, \int_0^z \psi_\varepsilon(s, \xi) d\xi \rangle + \langle (x-z)[B(s, z) - (t-s)B'_s(s, z)] \int_0^s \psi_\varepsilon(\tau, z) d\tau, \\ & + \int_0^s \psi_\varepsilon(\tau, z) d\tau \rangle + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x \{ \langle [C(s, z) - (x-z)C'_z(s, z) - (t-s)C'_s(s, z) + \\ & + (t-s)(x-z)C''_{sz}(s, z)] \int_0^s \int_0^z \psi_\varepsilon(\tau, \xi) d\xi d\tau, \int_0^s \int_0^z \psi_\varepsilon(\tau, \xi) d\xi d\tau \rangle \} dz ds = \\ & = \varepsilon \int_0^t \int_0^x \langle [u''_{sz}(s, z) - (t-s)u'''_{szs}(s, z) - (x-z)u'''_{szz}(s, z) + (t-s)(x-z)u^{IV}_{szsz}(s, z)], \\ & \int_0^s \int_0^z \psi_\varepsilon(\tau, \xi) d\xi d\tau \rangle dz ds, \quad (t, x) \in G \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть $u(t, x) \in Z_{2,n}(G)$ и

$$\|u''_{sz}(s, z) - (t-s)u'''_{szs}(s, z) - (x-z)u'''_{szz}(s, z) + (t-s)(x-z)u^{IV}_{szsz}(s, z)\| \leq C. \quad (17)$$

Тогда в силу условий а), б), в) из (16)

$$\begin{aligned} & \frac{K}{2} \int_0^t \int_0^x \left\langle \int_0^s \int_0^z \psi_\varepsilon(\tau, \xi) d\xi d\tau, \int_0^s \int_0^z \psi_\varepsilon(\tau, \xi) d\xi d\tau \right\rangle dz ds \leq \varepsilon \int_0^t \int_0^x \langle [u''_{sz}(s, z) - (t-s)u'''_{szs}(s, z) - \\ & - (x-z)u'''_{szz}(s, z) + (t-s)(x-z)u^{IV}_{szsz}(s, z)], \int_0^s \int_0^z \psi_\varepsilon(\tau, \xi) d\xi d\tau \rangle dz ds. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу (17) и неравенства Гельдера получается

$$\|u_\varepsilon(t, x) - u(t, x)\|_{L_2} \leq \frac{2C}{K} \sqrt{TX} \varepsilon, \quad (t, x) \in G. \quad (18)$$

где C - известное число не зависящий от ε определено в (17). Таким образом доказана

Теорема 2. Пусть выполняются условия а), б), в) и вектор $u(t, x)$ является решением задачи (1)-(2) из класса $Z_{2,n}(G)$ удовлетворяющие условие (17). Тогда решение $u_\varepsilon(t, x)$ задачи (11)-(12) представимо в виде (13) и при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится по норме $L_{2,n}(G)$ к решению $u(t, x)$ задачи (1)-(2). При этом справедлива оценка (18).

Заключение

В работе исследованы вопросы регуляризации и единственности решений вырождающихся систем дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Установлены условия корректности задач и показана эффективность применяемых методов при анализе таких задач.

Список литературы / References

1. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных // - М.: Наука 1983. - 417 с.

2. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики //– Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1984. –141 с.
3. *Сергеев В.О.* Регуляризация уравнений Вольтерра первого рода // Докл. АН СССР. –1971. –Т.197, №3. – С. 531-534.
4. *Тихонов А.Н.* Методы решения некорректных задач // А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1974. –142 с.
5. *Асанов А.Ж.А., Зулпукаров Ж.А.* О решении одной вырожденной краевой задачи // Исследование по интегро-дифференциальным уравнениям, – Бишкек: Илим, 2000. – Вып. 29. – С. 274-280.