ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Сапарова Г.Б.[1], Абылкасымова Г.Ы.[2], Айдаралиева Ч.[3]

[1]Сапарова Гульмира Баатыровна – кандидат физико – математических наук, доцент;
[2]Абылкасымова Гулмира Ырысбаевна – преподаватель,
[3]Айдаралиева Чынара – магистрант,
Ошский технологический университет,
г. Ош, Кыргызстан

Аннотация: *в данной статье рассмотрены методы статистического прогнозирования динамики случайных процессов на основе дискретных и непрерывных цепей Маркова. Описываются основные теоретические положения, алгоритмы построения моделей, методы оценивания вероятностей переходов и применения цепей Маркова для прогнозирования систем различной природы. Марковские модели остаются эффективным инструментом для изучения стохастических процессов в экономике, статистике и технических науках. Приведен пример на моделирование и прогнозирование, также обсуждаются преимущества и ограничения метода.*
Ключевые слова*: метод, прогнозирование, модели, цепи, процессы, анализ, Марковские модели.*

PREDICTING THE DYNAMICS OF RANDOM PROCESSES USING MARKOV CHAINS

Saparova G.B.[1], Abylkasymova G.Y.[2], Aydaraliyeva Ch.[3]

[1]Saparova Gulmira Baatirovna – candidat of physico – mathematical sciences, associate professor;
[2]Abylkasymova Gulmira Yrysbaevna – teacher;
[3]Aydaraliyeva Chynara – undergraduate,
OSH TECHNOLOGICAL UNIVERSITY,
OSH, KYRGYZSTAN

Abstract*: This article discusses methods for statistical forecasting of the dynamics of random processes based on discrete and continuous Markov chains. It describes the main theoretical principles, algorithms for building models, methods for estimating transition probabilities, and the application of Markov chains for forecasting systems of various types. Markov models remain an effective tool for studying stochastic processes in economics, statistics, and technical sciences. The article provides an example of modeling and forecasting, and discusses the advantages and limitations of the method.*
Keywords*: method, forecasting, models, chains, processes, analysis, Markov models.*

УДК 519.6

Введение. В разных областях науки, таких как экономика, экология, инженерия, биология и социальных науках наблюдаются процессы, развивающиеся во времени и содержащие элемент случайности. Эти процессы требуют статистического анализа и надежных методов прогнозирования. Многие реальные процессы обладают стохастической природой и описываются вероятностными моделями. В задачах прогнозирования часто требуется определить вероятное состояние системы в будущем на основе наблюдаемой динамики.

Одним из наиболее удобных и широко используемых инструментов для моделирования случайной динамики является цепь Маркова, предложенные А.А. Марковым в начале XX века. С помощью цепи Маркова можно описывать вероятностные переходы системы между состояниями. Основным преимуществом цепи Маркова является то, что прогноз зависит только от текущего состояния, что существенно упрощает моделирование сложных стохастических процессов. Также цепи Маркова позволяют моделировать системы, в которых будущее зависит только от текущего, а не от всей предыстории процесса. Такая особенность делает модель удобной для анализа сложных многокомпетентных систем: экономических показателей, производственных процессов, поведения потребителей, технических систем и др.

Цепь Маркова – это случайный процесс $\{X_t\}$ со счетным или конечным числом состояний, обладающий марковским свойством:

$$P\left(X_{t+1=j}\middle|X_t = i, X_{t-1}, \dots\right) = P\left(X_{t+1=j}\middle|X_{t=i}\right).$$

То есть будущее состояние зависит только от текущего.

Система возможных состояний:

$$S = \{s_1, \dots, s_n\}.$$

1.1. Матрица переходных вероятностей

Переходы между состояниями описываются матрицей:

$$P = (p| \quad |ij);$$

где

$$P = \begin{pmatrix} p_{11}p_{12} \cdots p_{1n} \\ p_{21}p_{22} \cdots p_{2n} \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ p_{n1}p_{n2} \cdots p_{nn} \end{pmatrix},$$

$$p_{ij} = P\left(X_{t+1=j} \vee X_{t=i}\right),$$

а строки матрицы удовлетворяют условиям:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, p_{ij} \geq 0.$$

1.2. $k -$ шаговыепереходы

Прогноз на k шагов вперед осуществляется через возведение матрицы:

$$P^{(k)} = P^k.$$

Вектор вероятностей состояний в момент $t + k$:

$$\pi_{t+k} = \pi_t P^{(k)}.$$

Рассмотрим оценивание параметров цепи Маркова.

На практике матрица P неизвестна. Ее оценивают по наблюдениям.

Применим частотный метод. Если количество переходов из состояний i в состояние j: N_{ij}, то

$$\hat{p_{ij}} = \frac{N_{ij}}{\sum_j N_{ij}}.$$

Данный метод прост и применяется почти всегда при дискретных моделях. Применяется также априорные распределения на вероятности переходов. Этот метод более устойчив при малом количестве наблюдений. Если состояния не наблюдаются напрямую, то применяют скрытые марковские модели, оценка проводится алгоритмами:

- Баума – Уэлча (EM - алгоритм);
- Витерби (для декодирования последовательности состояний).

Применение цепей Маркова к прогнозированию дается в следующих шагах:

1 шаг. Прогнозирование будущих состояний системы

Например, если система может принимать состояния:

- $s_1 -$ низкий уровень;
- $s_2 -$ средний уровень;
- $s_3 -$ высокий уровень.

Оценивается вероятность того, что через k шагов она окажется в каждом состоянии.

При прогнозировании распределения вероятностей используется формула:

$$\pi_{t+k} = \pi_t P^k.$$

Если цепь невырожденная, то предельное распределение равна:

$$\pi_t = \pi_0 P_t,$$

где $\pi -$ стационарное распределение. Таким образом, прогноз требует возведения матрицы к степени и умножения на начальный вектор.

Методика построения марковской модели по шагам:

Шаг 1. Выбор состояний процесса. Процесс дискретизируют по уровням, например: низкий, средний, высокий спрос.

Шаг 2. Сбор данных и подсчет частот переходов. Для каждой пары состояний

$$i \rightarrow j$$

считают частоту переходов.

Шаг 3. Формирование матрицы переходных вероятностей

$$p_{ij} = \frac{N_{ij}}{\sum_j N_{ij}},$$

где $N_{ij} -$ число наблюдаемых переходов из состояний i в j.

Шаг 4. Прогнозирование будущего состояния

Используется формула:

$$\pi_{t+1} = \pi_t P.$$

Пример 1. Рассмотрим процесс с тремя состояниями.

1 – низкое, 2 – среднее, 3 – высокое значение показателя (например, спроса уровня загрузки, доходности и др.)

Зафиксированы переходы между состояниями за 50 периодов. Построим таблицу переходов:

Из $\rightarrow B$	1	2	3
1	18	6	1
2	5	10	5
3	1	7	7

Вычислим вероятности:
- из состояния 1:

$$n = 25,\ p_{11} = \frac{18}{25} = 0{,}72; p_{12} = \frac{6}{25} = 0{,}24;\ p_{13} = \frac{1}{25} = 0{,}04.$$

- из состояния 2:

$$n = 20,\ p_{21} = \frac{5}{20} = 0{,}25; p_{22} = \frac{10}{20} = 0{,}5;\ p_{23} = \frac{5}{20} = 0{,}25.$$

- из состояния 3:

$$n = 15,\ p_{31} = \frac{1}{15} = 0{,}06; p_{32} = \frac{7}{15} = 0{,}44;\ p_{33} = \frac{7}{15} = 0{,}44.$$

Из данных наблюдений получили матрицу перехода:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}720{,}240{,}04 \\ 0{,}250{,}500{,}25 \\ 0{,}060{,}040{,}44 \end{pmatrix}.$$

В текущий момент система находится в состоянии 2. Тогда начальное распределение,

$$\pi_0 = (010).$$

Решение: Сделаем прогноз на один шаг

$$\pi_1 = \pi_0 P = (010) \times \begin{pmatrix} 0{,}720{,}240{,}04 \\ 0{,}250{,}500{,}25 \\ 0{,}060{,}040{,}44 \end{pmatrix} = (0{,}250{,}500{,}25).$$

Таким образом, $\pi_1 = (0{,}25; 0{,}50; 0{,}25)$.

Интерпретация:
- вероятность перехода к низкому уровню – 0,25;
- сохранения среднего уровня – 0,50;
- роста до высокого уровня – 0,25.

Заключение

Цепи Маркова являются мощным инструментом статистического прогнозирования случайных процессов. Они позволяют эффективно моделировать динамику систем, описывать вероятности переходов и строить долгосрочные прогнозы. Метод остается одним из наиболее универсальных и простых благодаря своей математической строгости, простоте применения и высокому качеству статистических оценок. Так как он прост в реализации и имеет, высокую интерпретируемость марковские модели широко применяются в экономике, инженерии, социальных и технических науках.

Список литературы / References

1. *Андерсен Дж., Гудман Л.* Стохастические процессы и приложения. – М.: Мир, 2019. – 464 с.
2. *Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н.* Лекции по теории вероятностей. – М.: Физматлит, 2022. – 459 с.
3. *Егоров Е.Б.* Прогнозирование динамики стохастических процессов на основе цепей Маркова. Вестник МГУ. Серия «Математика», 2020, №4, с. 78 – 92.
4. *Кокс Д., Миллер Х.* Теория стохастических процессов. – М.: Лаборатория знаний, 2020. – 352 с.
5. *Лопатин В.Е.* Статистические методы прогнозирования случайных процессов. Сибирский журнал индустриальной математики, 2018, №5, с. 58 – 69.
6. *Норрис Дж.* Марковские цепи. – М.: Физматлит, 2017. – 320 с.
7. *Портной И.Г.* Марковские процессы. Математические модели и приложения. – СПб.: Питер, 2021. – 384 с.
8. *Петрова И.М.* Применение скрытых марковских моделей для анализа финансовых временных рядов. Финансы и бизнес, 2023, №2, с. 33 – 47
9. *Сапарова Г.Б.* Метод обратных вычислений для задач оптимизации. №1(4), 2024, Вестник, ОшГУ. Математика. Физика. Техника, С.179 – 184.
10. *Фомин А.Г.* Марковские модели и их применения в анализе временных рядов. Прикладная математика и информатика, 2021, №3, с. 44 – 57.