УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА СЕТЕЙ С ПРОТОКОЛОМ КОММУТАЦИИ КАНАЛОВ

Шамсиев Р.Н.

Шамсиев Рахим Нажмиддинович – кандидат физико-математических наук, доцент,
кафедра математики и физики,
Негосударственное образовательное учреждение Afraganus University,
г. Ташкент, Республика Узбекистан

Аннотация: *данная работа посвящена нахождению условии существования стационарного режима сетей с протоколом коммутации каналов, состоящей из трех периферийных и одного центральных узлов. Приведено наглядное описание работы сети по временам ожиданий в узлах и каналах. Формальное описание правила передачи приведено с помощью уравнений FCFS для времен ожиданий в узлах и каналах. Основным результатом работы является теорема, в котором найдено условия существования, единственности стационарного режима работы сети и убывания корреляций по времени как маркированный случайный процесс.*

Ключевые слова: *сети с очередями, коммутация каналов, правило передачи, экспоненциальное распределение, времена ожиданий.*

CONDITION FOR THE EXISTENCE OF STATIONARY MODE NETWORKS WITH CHANNEL SWITCHING PROTOCOL

Shamsiev R.N.

Shamsiev Rakhim Nazhmiddinovich – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor,
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND PHYSICS,
NON-STATE EDUCATIONAL INSTITUTION AFRAGANUS UNIVERSITY,
TASHKENT, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: *this work is devoted to finding the condition for the existence of a stationary mode of networks with a circuit switching protocol, consisting of three peripheral and one central nodes. A visual description of the network operation is given in terms of waiting times in nodes and channels. A formal description of the transmission rule is given using the FCFS equations for waiting times in nodes and channels. The main result of the work is a theorem in which conditions were found for the existence, uniqueness of a stationary mode of operation of the network and a decrease in correlations over time as a marked random process.*

Keywords: *networks with queues, circuit switching, transmission rule, exponential distribution, waiting times.*

УДК 519.21.

Теория сетей с очередями имеет большой практический интерес. Они используются в качестве моделей во многих приложениях-от транспортных сетей до глобальных информационных сетей (например, Internet) [1]-[4].

Периферийные узлы сети обозначим через A, B и D, а центрального через C. В каждый периферийный узел поступает Пуассоновский поток сообщений с параметрами λ_A, λ_B и λ_D соответственно. Длины сообщений возникших в этих узлах экспоненциально распределенные случайные величины с параметрами μ_A, μ_B и μ_D. Каждое сообщение возникшее в узле A имеет маршрут $A \to C$ с вероятностью $1 - q$ и $A \to C \to B$ или $A \to C \to B$ с вероятностью $q/2$. Сообщения возникшие в узлах B и D имеют маршруты $\{B \to C$ и $B \to C \to A$ или $B \to C \to D\}$, $\{D \to C$ и $D \to C \to A$ или $D \to C \to B\}$ соответственно с такими же вероятностями.

Сообщение получает доступ к следующему этапу в соответствии дисциплины FCFS(First came-first is serviced (первый пришел-первым обслуживается)). Через $y_A = \{t; (L, l)\}$ обозначим сообщение возникший в узле A в момент t имеющий маршрут L и с длиной l, где L принимает как значение один из маршрутов $A \to C$ или $A \to C \to B$ или $A \to C \to B$. С математической точки зрения это означает, что задано семейство независимых маркированных пуассоновских процессов $\{\xi_i, i = A, B, C\}$ интенсивности λ_A, λ_B и λ_D соответственно с независимых одинаково распределенных марками (L, l).

Теперь приведем наглядное описание правила передачи. Сообщение $y_A = \{t; (L, l)\}$ ожидает, пока этот узел не покинут сообщения, возникшие здесь, т.е. в узле A, до него. Данный этап «жизни» сообщения удобно назвать нулевой фазой ожидания; его длительность обозначается через $W^0(y_A)$. С наглядной точки зрения, $W^0(y_A)$ – это время ожидания сообщением y_A доступа к сети. Если $L = \{A \to C\}$, то после завершения нулевой фазы ожидания, т.е., в момент $t(y_A) + W^0(y_A)$ (момент получения доступа к сети) сообщение y_A передается по линии $A \to C$ в течение времени, равного длине сообщения $l(y_A)$. Если же $l = \{A \to C \to B$ или $A \to C \to D\}$, то в момент $t(y_A) + W^0(y_A)$ сообщение «закрепляет» за собой линию $A \to C$ и начинает «претендовать» на вторую линию маршрута, т.е. на линию $C \to B$ или $C \to D$. Для сообщения y_A начинается первая фаза ожидания, в ходе которой оно пропускает перед собой сообщения с маршрутами $D \to C \to B$ или $B \to C \to D$, если $L(y_A) = \{A \to C \to B\}$ или $L(y_A) = \{A \to C \to D\}$ соответственно и начавшие претендовать на эту линию раньше, чем это сделало сообщение y_A. По завершении этой фазы ожидания, длительность которой обозначается $W^1(y_A)$ сообщение y_A передается по каналу $A \to C \to B$ (или $A \to C \to B$) в течение времени $l(y_A)$ и после чего выбывает из дальнейшего рассмотрения.

Сообщения возникших в узлах B и D передаются своим адресатам по выше указанной правиле передачи.

Теперь приведем формальное описание правила передачи. Для любых последовательно возникших в узле A сообщений y_A', y_A'':

(а) в случае если $L(y_A') = \{A \to C\}$ выполнены соотношения.

$$t(y_A') + W^0(y_A') + l(y_A') \le t(y_A'') + W^0(y_A'') \qquad (1)$$

$$W^0(y_A'') = \max\{0, W^0(y_A') + l(y_A') - \left(t(y_A'') - t(y_A')\right)\} \qquad (2)$$

(б) если $L(y_A') = \{A \to C \to B\}$ или $L(y_A') = \{A \to C \to D\}$, то

$$W^0(y_A'') = \max\{0, W^0(y_A') + W^1(y_A') + l(y_A') - \left(t(y_A'') - t(y_A')\right)\} \qquad (3)$$

(в) если $L(y_A') = \{A \to C \to B\}$ и $L(y_A'') = \{A \to C \to B\}$, то

$$t(y_A') + W^0(y_A') + W^1(y_A') + l(y_A') \le t(y_A'') + W^0(y_A'') + W^1(y_A'') \qquad (4)$$

$$W^1(y_A'') = \max\{0, W^0(y_A') + W^1(y_A') + l(y_A') - \left(t(y_A'') - t(y_A')\right)\} \qquad (5)$$

(г) для любых последовательно претендовавших на линию $C \to B$ возникших в узлах A и D сообщений y_D', y_A'':

$$t(y_D') + W^0(y_D') + W^1(y_D') + l(y_D') \le t(y_A'') + W^0(y_A'') + W^1(y_A'') \qquad (6)$$

$$W^1(y_A'') = \max\{0, W^0(y_D') + W^1(y_D') + l(y_D') - \left(t(y_A'') - t(y_D')\right)\} \qquad (7)$$

Математическая задача состоит в том, чтобы построить семейство маркированных случайных процессов $\{\eta_i, i = A, B, D\}$, с марками $\{L, l, W^0, W^1\}$, которые дают решение уравнений (2), (3), (5), (7). Можно говорить, что искомое семейство маркированных случайных процессов $\{\eta_i, i = A, B, D\}$ должны задавать «оснащение» пуассоновских процессов $\{\xi_i, i = A, B, D\}$, согласованное с описанным выше правилом передачи.

Теорема. Пусть $q < \frac{1}{3}$ и $\frac{\lambda_A}{\mu_A} < 1, \frac{\lambda_B}{\mu_B} < 1, \frac{\lambda_D}{\mu_D} < 1$. Тогда существует семейство маркированных случайных процессов $\{\eta_i, i = A, B, D\}$, дающее решение уравнений (2), (3), (5), (7). Это семейство единственно и обладает свойством убывания корреляций по времени.

На первом этапе построения семейство маркированных случайных процессов $\{\eta_i, i = A, B, D\}$ рассматривается сеть, которая начинает работу в момент времени t_0, исходя из «нулевого» начального состояния. Формально говоря, рассматривается «урезанное» семейство внешних потоков $\{\xi_{i,\ge t_0}, i = A, B, D\}$, где $\xi_{i,\ge t_0}$ сужение потока ξ_i на $[t_0, +\infty)$, а также прежнее правило передачи.

Лемма 1. Пусть семейство внешних потоков $\{\xi_i, i = A, B, D\}$ и правило передачи удовлетворяют условиям, сформулированным выше. Тогда для любого $t_0 \in R^1$ существует единственное семейство потоков $\{\eta_{i,\ge t_0}, i = A, B, D\}$ с марками $\{L, l, W^0, W^1\}$, удовлетворяющее системе уравнений (2), (3), (5), (7). Это семейство является оснащением семейства потоков $\{\xi_{i,\ge t_0}, i = A, B, D\}$.

Доказательство леммы проводится с помощью «непосредственного» построения. Мы «запускаем» сеть в момент времени t_0, последовательно «присваивая» сообщениям соответствующие значения компонент марки W^0, W^1.

На втором этапе доказывается, что семейство маркированных случайных процессов $\{\eta_{i,\ge t_0}, i = A, B, D\}$ сходиться при $t_0 \to -\infty$ к предельному семейству $\{\eta_i, i = A, B, D\}$. Предельные η_i будут представлять собой оснащение пуассоновских потоков $\{\xi_i, i = A, B, C\}$ и дают решение системы уравнений (2), (3), (5), (7).

Важную роль в ходе доказательства теоремы играет семейство независимых одинаково распределенных маркированных случайных процессов $\{\zeta_i, i = A, B, D\}$, которые будет в естественном смысле мажорировать допредельные семейства $\{\eta_{i,\geq t_0}, i = A, B, D\}$, равно как и предельное семейство $\{\eta_i, i = A, B, D\}$. Возможность построения такой мажоранты, не зависящей от t_0, означает, что аппроксимирующие семейство маркированных случайных процессов $\{\eta_{i,\geq t_0}, i = A, B, D\}$, а следовательно и предельные семейство маркированных случайных процессов $\{\eta_i, i = A, B, D\}$ не могут «уйти в бесконечность». Более того, через мажорирующие семейство маркированных случайных процессов можно оценить «степень распространения влияния» в семействах маркированных случайных процессов $\{\eta_{i,\geq t_0}, i = A, B, D\}$.

В силу независимости для задания совместного распределения семейства $\{\zeta_i, i = A, B, D\}$ нам достаточно построить распределение отдельного мажорирующего маркированного случайного процесса, который мы условимся обозначать через ζ. Это процесс с марками из R_+^1, представляющий собой суперпозицию двух независимых маркированных случайных процессов

$$\zeta = \xi_1 \dot{+} \xi_2 \qquad (8)$$

Здесь ξ_1, ξ_2 пуассоновские процессы интенсивности $\lambda = \max\{\lambda_A, \lambda_B, \lambda_D\}$ и λq соответственно, с независимыми экспоненциально распределенными марками из R_+^1 с параметром $\mu = \max\{\mu_A, \mu_B, \mu_D\}$.

Лемма 2. (а) При достаточно малом значении q маркированный случайный процесс ζ допускает единственное оснащение, согласованное с уравнением очереди FCFS. При этом для любого набора непересекающихся интервалов $I_1, I_2, \dots, I_m$ и любого набора точек $y_1, y_2, \dots, y_n \in Z_\mu^1$ условная вероятность

$$P\left(B_{I_1}^{(\zeta)} \cap B_{I_2}^{(\zeta)} \cap \dots \cap B_{I_m}^{(\zeta)} \middle| [\zeta(y_1), \zeta(y_2), \dots, \zeta(y_n)]\right) \leq C_0^{n+m} \exp\left(-C_1 \sum_{s=1}^{m} |I_s|\right)$$

Здесь $B_{I_s}^{(\zeta)}, s = 1,2, \dots, m -$ событие, состоящее в том, что в потоке ζ интервал I_s содержится в одном из периодов занятости, роль условия играет событие, что в моменты $y_s, s = 1,2, \dots, n$в потоке ζ «появились» сообщения, а $C_0, C_1 > 0$ – фиксированные константы.

(б) При любом t_0 маркированные случайные процессы $\xi_{i,\geq t_0}$и $\zeta_i, i = A, B, D$ можно определить на одном вероятностном пространстве (Ω, D, P) так, что с P вероятностью 1 при всех $t \geq t_0$ будет выполнено неравенство

$$W_t(\eta_{i,\geq t_0}) \leq W_t(\zeta_i)$$

Здесь $W_t(\bullet)$ – процесс виртуального времени ожидания.

Для некоторых узких классов сетей с очередями можно вычислить вероятностные характеристики состояния сетей [5], [6].

Заключение. Таким образом, при выполнении условий (8) сеть с протоколом коммутации каналов, согласованная с соотношениями и уравнениями (1) – (7), имеет единственный стационарный режим работы, не зависящее от начального состояния. Этот стационарный режим обладает свойством убывания корреляций по времени.

Список литературы / References

1. *Вишневский В.М.* Теоретические основы проектриования компьютерных сетей // Москва, Техносфера. – 2003. 512 с.
2. *Долгушин Д.Ю.* Имитационное моделирование дорожного движения для оценки экологического влияния автотранспорта // Системы управления и информационные технологии. – 2009. – № 4.1 (38). – С. 139–142.
3. *Летунович Ю.Е., Якубович О.В.* Открытые марковские сети массового обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом // Вестник Томского государственного Университета. Управление, вычислительная техника и информатика, 2017, №41, С. 32-36.
4. *Задорожный В.Н.* Оптимизация маршрутных матриц в сетях с очередями. Омский научный вестник. – 2016, №6(150), С.152-157.
5. *Шамсиев Р.Н., Куралов Б.А.* Вероятностные характеристики состояния сетей связи с двумя типами сообщений // Вестник науки и образования 2019. № 4(58). Часть 2. С.6-8.
6. *Шамсиев Р.Н.* Об одном методе нахождении вероятностных характеристик состояний сети связи // Проблемы современной науки и образования 2018. № 13 (133), С.7-10.