ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ АВТОНОМНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОНЕЧНЫМ ПОСЛЕДСТВИЕМ

Алымбаев А.Т.[1], Б.А.[2]

*[1]Алымбаев Асангул Темиркулович - доктор физико-математических наук, профессор,
кафедра математики и технологии ее обучения, факультет физико-математических образований и информационных технологий,
Государственный университет им. И. Арабаева, г. Бишкек;
[2]Бапа кызы Айнура - магистр физико-математического образования, ст. преподаватель,
кафедра высшей математики, технологии обучения математики и информатики, факультет физико-математический и естественно-технический,
Иссык-Кульский государственный университет им. К. Тыныстанова, г. Каракол,
Кыргызская Республика*

Аннотация: *рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений с конечным последствием обладающей свойством автономностью. Методом Галеркина построена периодическое решение. Получена оценка точности между точными и приближенными решениями.*
Ключевые слова: *интегро-дифференциальная уравнение, Метод Галеркина, периодическое решение, оценка точности.*

PERIODIC SOLUTION OF A SYSTEM OF AUTONOMOUS INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A FINITE CONSEQUENCE

Alymbaev A.T.[1], Bapa kyzy A.[2]

*[1]Alymbaev Asangul Temirkulovich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND TECHNOLOGY OF ITS TEACHING, FACULTY OF PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION AND INFORMATION TECHNOLOGIES,
STATE UNIVERSITY NAMED AFTER I. ARABAEV, BISHKEK;
[2]Bapa kyzy Ainura - Master of Physics and Mathematics Education, Senior Lecturer,
DEPARTMENT OF HIGHER MATHEMATICS, TEACHING TECHNOLOGIES FOR MATHEMATICS AND INFORMATICS,
FACULTY OF PHYSICS, MATHEMATICS AND NATURAL TECHNOLOGY,
ISSYK-KUL STATE UNIVERSITY NAMED AFTER K. TYNYSTANOV, KARAKOL,
REPUBLIC OF KYRGYZSTAN*

Abstract: *a system of integro-differential equations with a finite consequence possessing the property of autonomy is considered. A periodic solution is constructed by the Galerkin method. An estimate of the accuracy between exact and approximate solutions is obtained.*
Keywords: *integro-differential equation, Galerkin method, periodic solution, accuracy estimation.*

MSC 45A05,45B05

1. Задача приводимости.

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{X}(x) + \varepsilon f(x, \int_t^{t+T_0} P(t-s, x(s)ds, \varepsilon), \qquad (1.1)$$

где: x-n-мерный вектор, X, f, P-n-мерные вектор-функции, -малый параметр,
T_0-фиксированное положительное число.

Относительно вектор-функции предпологается:

$$\mathrm{X}(x) \in C^2_{xx}(\Omega), f(x,y,\varepsilon) \in C^1_{xy}(\Omega \times \Omega_1 \times E), P(t-s,x) \in C^{\,1}_{\,x}(R \times R \times \Omega),$$

где: Ω-ограниченная выпуклая область евклидового пространства $E_n, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$
Ω_1-шар в пространстве E_n.

Система (1.1) обладает свойством автономности.

ЛЕММА1.Если функция $x = x^0(t)$ является решением системы (1.1),
то $x = x^0(t+c)$, где c-const, также является решением системы (1.1).

Доказательство. Поставляя $x = x^0(t+c)$ в систему (1.1) имеем:

$$\frac{dx^0(t+c)}{d(t+c)} = \frac{dx^0(t+c)}{dt} = \mathrm{X}(x^0(t+c)) + \varepsilon f(x^0(t+c), \int_{t+c}^{t+c+T_0} P(t+c-s, x^0(s)ds, \varepsilon) = \mathrm{X}(x^0(t+c)) + \varepsilon f(x^0(t+c), \int_t^{t+T_0} P(t-s, x^0(s+c)ds, \varepsilon)$$

Предположим, что при $\varepsilon = 0$ невозмущенная система, системы (1.1) имеет $\frac{2\pi}{\omega_0}$- периодическое решение $x = x_0(\omega_0, t)$. Введем в системе (1.1) замену переменных

$$x = x_0(\varphi) + B(\varphi)h \quad , h = (h_1, h_2, \dots, h_{n-1}), \qquad (1.2)$$

где: $B(\varphi)$ –некоторая $n \times (n-1)$-мерная матрица с непрерывно дифференцируемыми и периодическими по φ периода 2π функциями. Тогда согласно [2], если

$$det\left(\frac{dx_0(\varphi)}{d\varphi}, \Phi(\varphi)\right) \neq 0,$$

то система(1.1) преобразуется к системе интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \mathcal{F}_1(\varphi, h) + f_1\left(\varphi, h, \frac{1}{\omega_0}\int_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1)\right) d\varphi_1, \varepsilon)$$

$$\frac{dh}{dt} = G_1(\varphi, h) + g_1\left(\varphi, h, \int_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1\big(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1)\big) d\varphi_1, \varepsilon\right),$$

где: $\begin{pmatrix}\mathcal{F}_1\\ G_1\end{pmatrix} = \Phi^{-1}(\varphi, h)\left(X(x_0(\varphi) + B(\varphi)h) - X\big(x_0(\varphi)\big) - \frac{dB(\varphi)}{d\varphi} h\omega_0\right)$,

$$\begin{pmatrix}f_1\\ g_1\end{pmatrix} = \Phi^{-1}(\varphi, h)\varepsilon f(x_0(\varphi) + (\varphi), h, \frac{1}{\omega_0}\int_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P(\frac{\varphi - \varphi_1}{\omega_0}, x_0(\varphi_1) + B(\varphi_1)h(\varphi_1)) d\varphi_1),$$

$$\Phi(\varphi, h) = \left(\frac{dx_0(\varphi)}{d\varphi} + \frac{dB(\varphi)}{d\varphi}h, B(\varphi)\right).$$

В окрестности точки $h = 0$ *и* $\varepsilon = 0$ имеют место соотношения:

$$\mathcal{F}_1(\varphi, 0) = G_1(\varphi, 0) = 0 \quad и \quad f_1(\varphi, h, \vartheta, 0) = g_1(\varphi, h, \vartheta, 0) = 0$$

Наряду с системой (1.2) будем рассматривать систему интегро-дифференциальных уравнений с 2π-периодической правой частью вида

$$\frac{dh}{d\varphi} = \frac{G_1(\varphi, h)}{\omega_0 + \mathcal{F}_1(\varphi, h) + f_1\left(\varphi, h, \frac{1}{\omega_0}\int_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1\big(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1)\big) d\varphi_1, \varepsilon\right)} +$$
$$+ \frac{g_1\left(\varphi, h, \frac{1}{\omega_0}\int_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1\big(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1)\big) d\varphi_1, \varepsilon\right)}{\omega_0 + \mathcal{F}_1(\varphi, h) + f_1\left(\varphi, h, \frac{1}{\omega_0}\int_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1\big(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1)\big) d\varphi_1, \varepsilon\right)}. \qquad (1.3)$$

На основании сделанных предположений на гладкость функции X, f, P и матрицы B, систему (1.3) можно представить в виде

$$\frac{dh}{d\varphi} = C(\varphi)h + H\left(\varphi, h, \frac{1}{\omega_0}\int_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1\big(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1)\big) d\varphi_1, \varepsilon\right), \qquad (1.4)$$

где: $C(\varphi) = \frac{1}{\omega_0}\frac{\partial G_1(\varphi, h)}{\partial h}$, $\quad \mathcal{F}_1(\varphi, h) = O(|h|^2)$,

$$H\left(\varphi, h, \frac{1}{\omega_0}\int_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1\big(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1)\big) d\varphi_1, \varepsilon\right) =$$
$$= -\frac{G_1(\varphi, h) f_1\left(\varphi, h, \frac{1}{\omega_0}\int_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1\big(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1)\big) d\varphi_1, 0\right) / \partial\varepsilon}{\big(\omega_0 + \mathcal{F}_1(\varphi, h)\big)^2}\varepsilon +$$
$$+ \frac{g_1\left(\varphi, h, \frac{1}{\omega_0}\int_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1\big(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1)\big) d\varphi_1, \varepsilon\right)}{\omega_0 + \mathcal{F}_1(\varphi, h) + f_1\left(\varphi, h, \frac{1}{\omega_0}\int_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1\big(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1)\big) d\varphi_1, \varepsilon\right)} + O(\varepsilon^2),$$

при этом $\quad \mathcal{F}(\varphi, 0) = 0, \quad H(\varphi, h, \vartheta, 0) = 0$

Если система (1.4) допускает 2π-периодическое решение $h = h(\varphi, \varepsilon)$, то из первого уравнения (1.2) можем определить явную зависимость $\varphi = \varphi(t, \varepsilon)$ и следовательно, можем получить $\frac{2\pi}{\omega}$ – периодическое решение $h = h(\varphi(t, \varepsilon), \varepsilon)$

системы уравнений (1.4), где $\omega = \omega(\varepsilon)$ корень уравнения $\varphi(\omega(\varepsilon), \varepsilon) = 2\pi$.

Следовательно, в дальнейшем задача заключается в отыскании 2π-периодического решения системы (1.4). Для нахождения периодического решения (1.4) применяем метод Галеркина [1].

2. Алгоритм отыскания периодических решений.

Обозначим через $C^r(\mathcal{T} \times D \times D_1 \times E)$ пространство непрерывно дифференцируемых относительно $(\varphi, h, u, \varepsilon)$ 2π-периодических функций $f(\varphi, h, u, \varepsilon)$, где $\mathcal{T} \in [0, 2\pi], D \subset E_{n-1}$, $D_1\colon \|u\| \in d$, $D_1 \subset E_{n-1} - (n-1) -$

-мерное евклидово пространство, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Для элементов пространства $C^r(\mathcal{T} \times D \times D_1 \times E)$ будем рассматривать нормы:

$$|f|_r = \max_{0 \le \varphi \le 2\pi} |Df|_0, \; |f|_0 = \max_{\mathcal{T} \times D \times D_1} \|f(\varphi, h, u, \varepsilon)\|$$

$|f|_0 = \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f\|^2 d\varphi\right]^{\frac{1}{2}}$, где: $D^r f$ – частная производная по φ, h, u порядка r функции $f(\varphi, h, u)$, $\|f\|$ - евклидова норма.

Положим,

$S_n\psi(\varphi) = C_0 + \sqrt{2}\sum_{i=1}^{m}(c_k cosk\varphi + d_k sink\varphi)$,

где:

$\psi(\varphi) = c_0 + \sum_{i=1}^{m}(c_k cosk\varphi + d_k sink\varphi)$.

Согласно [3] для функции $\psi(\varphi)$ справедливы оценки

$$|\psi - S_m\varphi|_0 \leq \sigma(m)|\psi(\varphi)|_0, \qquad (2.1)$$

$$\|\psi - S_m\varphi\| \leq \sigma_1(m)\|\psi(\varphi)\|_0, \qquad (2.2)$$

где: $\sigma(m) = \sqrt{2}[(m+1)^2 + (m+2)^2 + \cdots ....]$, $\sigma_1^2(m) \leq (m+1)^2$

$$\frac{\sqrt{2}}{m+1} < \sigma(m) < \frac{\sqrt{2}}{m}, \quad \sigma(0) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Приближенные решения системы (1.4) будем искать в виде

$$h_m(\varphi) = a_0 + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{m}(a_k cosk\varphi + b_k sink\varphi),$$

определяя коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_m$ из системы уравнений

$$\frac{dh_m(\varphi)}{d\varphi} = S_m[C(\varphi)h_m(\varphi) + \mathcal{F}(\varphi, h_m(\varphi)) +$$

$$+H((\varphi)h_m(\varphi), \frac{1}{\omega_0}\int_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1(\varphi, \varphi_1, h_m(\varphi_1))d\varphi_1, \varepsilon)],$$

которая эквивалентна системе алгебраических уравнений

$$D^m\alpha + F_1^{(m)}(\alpha) + F_1^{(m)}(\alpha, \varepsilon) = 0, \qquad (2.3)$$

где: $\alpha = (2m+1) \times (n-1)$ мерный вектор коэффициентов:

$\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m)$.

$$D^{(m)} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \sin 0\,\varphi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\sin\varphi & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & m\sqrt{2}\sin m\varphi \\ 0 & \sqrt{2}\cos\varphi & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & m\sqrt{2}\cos m\varphi \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} S_m(\cos\varphi) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{2}S_m(C(\varphi)\cos\varphi) & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{2}S(C(\varphi)\cos \mathrm{m}\,\varphi) \\ 0 & \sqrt{2}S_m(C(\varphi)\sin\varphi) & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{2}S_m(C(\varphi)\sin \mathrm{m}\,\varphi) \end{pmatrix}$$

$$F_1^{(m)}(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_m(\mathcal{F}(\varphi, h_m(\varphi), d\varphi)d\varphi) F_1^{(m)}(\alpha, \varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_m\left(H(\varphi, h_m(\varphi), \frac{1}{\omega_0}\int_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1(\varphi, \varphi_1, h_m(\varphi_1))d\varphi_1, \varepsilon)d\varphi\right)$$

Основная лемма. Дана система уравнений вида:

$$D_\alpha + F_1(\alpha) + F_2(\alpha, \varepsilon) = 0, \qquad (2.4)$$

где α_1, F_1, F_2- векторы одинаковой размерности и F_1, F_2-непрерывно дифференцируемые функции, в области $\Delta : detD \neq 0$, ε- малый параметр,

причем $F_1(0) = 0$, $F_2(\alpha, 0) = 0$, $F_2(0, \varepsilon) \neq 0$, $\frac{\partial F_1(0)}{\partial \alpha} \neq 0$.

Предположим также, что система (2.4) имеет приближенное решение $\alpha = \bar{\alpha}(\varepsilon)$ такое, что $\bar{\alpha}(0) = 0$ и существуют постоянные $\delta > 0, \eta > 0, \varepsilon > 0$ *и* $0 \leq \chi < 1$ такое, что

1. $\Delta_\delta = \{\alpha : \|\alpha - \bar{\alpha}\| \leq \delta\} \subset \Delta$.
2. $\|D^{-1}[F_1(\bar{\alpha}) + F_1(\bar{\alpha}, \varepsilon)] + \bar{\alpha}\| \leq \eta$, $\left\|\frac{\partial F_1(\bar{\alpha})}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_1(\bar{\alpha}, \varepsilon)}{\partial \alpha}\right\| \leq \frac{\chi}{M}$.

3. $\frac{\eta}{1-\chi} \leq \delta$,

где: $M = |detD^{-1}|$ тогда система (2.4) имеет единственное решение $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ такое, что $\alpha(0) = 0$ в области Δ_δ и $\|\alpha(\varepsilon) - \bar{\alpha}(\varepsilon)\| \leq \frac{\eta}{1-\chi}$.

Решение $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ находим согласно алгоритму

$$\alpha_{k+1} = -D^{-1}\big(F_1(\alpha_k) + F(\alpha_k, \varepsilon)\big), \quad \alpha_0 = \bar{\alpha}(\varepsilon), \quad k = 0,1,2,\dots \quad .$$

Лемма 2. Предположим, что линейная система $\frac{dh(\varphi)}{d\varphi} = C(\varphi)h(\varphi)$

имеет функцию Грина $G(\varphi,\tau)$ от ограниченных решений в интервале

$\mathcal{T}_1 = (-\infty, \infty)$, обладающую свойствами

$G(\tau + 0, \tau) - G(\tau - 0, \tau) = E$ -единичная матрица,

$\|G(\varphi,\tau)\| \ll M_0 e^{-\lambda_0|\varphi-\tau|}, \qquad \varphi, \tau \epsilon \mathcal{T}_1, \quad \varphi \neq \tau$,

где λ_0, M_0-положительные постоянные. Тогда $detD^{(m)} \neq 0$ при больших m.

Доказательство. Поскольку система алгебраических уравнений $D^{(m)}\alpha = 0$ равносильно системе $\frac{dh_m(\varphi)}{d\varphi} = S_m(C(\varphi)h_m(\varphi))$, на основании функции Грина записываем эквивалентную ему систему интегральных уравнений

$h_m(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\varphi,\tau)[S_m - I]C(x)h_m(\tau)d\tau$,

где I-тождественный оператор, с учетом (2.2) получим неравенство

$$\|h_m(\varphi)\|_0 \leq \frac{2M_0}{\lambda_0}\sigma_1(m)[|C(\varphi)|_0\|h_m\|_0 + |C(\varphi)|_0\|h_m\|_0] \ . \qquad (2.5)$$

Так как $\sigma_1(m) \to 0$ при $m \to \infty$, то из неравенства следует

$\|h_m(\varphi)\| \to 0$ *при* $m \to \infty$, следовательно $\alpha \to 0$.

Это возможно в случае обратимости матрицы $D^{(m)}$ т.е. если $detD^{(m)} \neq 0$ при $m \to \infty$. Лемма доказана.

Теорема. Пусть система интегро-дифференциальных уравнений (1.4) такова, что выполняются условия:

$d_1 \geq T_0 \max\limits_{\varphi_1, \varphi \epsilon \mathcal{F}} |P_1(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1))| = T_0|P_1|_0$;

б) существует 2π – периодическое решение $\bar{h} = \bar{h}(\varphi, \varepsilon)$ принадлежащее в области $D_\delta \subset D$, где D_δ множество точек, которые принадлежать D вместе своей δ – окрестностью;

в) система $\frac{dh(\varphi)}{d\varphi} = C(\varphi)h(\varphi)$ имеет функцию Грина $G(\varphi, \tau)$.

Тогда можно указать такое достаточно большое m_0, что при всех $m \geq m_0$ существуют приближения Галеркина $h_m = h_m(\varphi, \varepsilon)$ равномерно сходящиеся при $m \to \infty$ к точному периодичекому решению $\bar{h}^0 = \bar{h}^0(\varphi, \varepsilon)$и удовлетворяет неравенству

$$\left|h_m(\varphi, \varepsilon) - \bar{h}(\varphi, \varepsilon)\right|_0 \ll \bar{M}(\varepsilon)\frac{\sqrt{2m-1}}{m+1} + |Ch + \mathcal{F} + H|_0\sigma(m).$$

Доказательство. Полагая $S_m\bar{h}(\varphi,\varepsilon) = \bar{h}_m(\varphi, \varepsilon)$, получаем равенство

$$\frac{d\bar{h}_m(\varphi,\varepsilon)}{d\varphi} = S_m\left(C(\varphi)\bar{h}(\varphi,\varepsilon) + \mathcal{F}\left(\varphi, \bar{h}(\varphi,\varepsilon)\right) + +H\left(\varphi, \bar{h}(\varphi,\varepsilon), \frac{1}{\omega_0}\int_\varphi^{\varphi+\omega_0T_0} P_1\big(\varphi,\varphi_1,h(\varphi_1)\big)d\varphi_1, \varepsilon\right)d\varphi\right) =$$

$$S_m\big(C(\varphi)\bar{h}_m + \bar{\mathcal{F}}_m + \bar{H}_m\big) + +S_m\left(C(\varphi)\big(\bar{h} - \bar{h}_m\big)\right) + S_m(\mathcal{F} - \bar{\mathcal{F}}_m) + S_m(H - \bar{H}_m), \qquad (2.6)$$

где $\quad \bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F}(\varphi, \bar{h}(\varphi,\varepsilon)), \bar{\mathcal{F}}_m = \mathcal{F}(\varphi, \bar{h}_m(\varphi,\varepsilon))$,

$$\bar{H} = H(\varphi, \bar{h}(\varphi,\varepsilon), \frac{1}{\omega_0}\int_\varphi^{\varphi+\omega_0T_0} P_1\big(\varphi,\varphi_1,h(\varphi_1,\varepsilon)\big)d\varphi_1, \varepsilon),$$

$$\bar{H}_m = H_m(\varphi, \bar{h}(\varphi,\varepsilon), \frac{1}{\omega_0}\int_\varphi^{\varphi+\omega_0T_0} P_1\big(\varphi,\varphi_1,h(\varphi_1,\varepsilon)\big)d\varphi_1, \varepsilon)$$

Равенство (2.6) эквивалентно следующему алгебраическому уравнению

$$D^{(m)}\alpha + F_1^{(m)}(\alpha) + F_2^{(m)}(\alpha, \varepsilon) = -(\rho_1^{(m)} + \rho_2^{(m)} + \rho_3^{(m)}(\varepsilon)) \qquad (2.7)$$

где: $\rho_1^{(m)}, \rho_2^{(m)}, \rho_3^{(m)}(\varepsilon)$- векторы коэффициентов Фурье, функции

$$S_m(C(\varphi)(\bar{h} - \bar{h}_m)), \qquad S_m(\mathcal{F} - \bar{\mathcal{F}}_m), \qquad S_m(H - \bar{H}_m). \qquad (2.8)$$

Применяя к функциям (2.8) неравенство Шварца, оценки (2.2) и представлений

$\mathcal{F}\big(\varphi, \bar{h}\big) - \mathcal{F}(\varphi, h_m) = \int_0^1 \frac{\partial\mathcal{F}(\varphi, \bar{h}_m + \theta(\bar{h} - \bar{h}_m))}{\partial h}(\bar{h} - \bar{h}_m)\, d\theta$,

$$H(\varphi,\bar{h},\frac{1}{\omega_0}\int\limits_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1(\varphi,\varphi_1,\bar{h})d\varphi_1,\varepsilon)-)\ H(\varphi,\bar{h}_m,\frac{1}{\omega_0}\int\limits_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1(\varphi,\varphi_1,\bar{h}_m)d\varphi_1,\varepsilon)=$$

$$=\int\limits_0^1 \frac{\partial H\left(\varphi,\bar{h}_m+\theta(\bar{h}-\bar{h}_m),\frac{1}{\omega_0}\int_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1(\varphi,\varphi_1,\bar{h})d\varphi_1,\varepsilon\right)}{\partial h}\times(\bar{h}-\bar{h}_m)d\theta$$

$$+\int\limits_0^1 \frac{\partial H(\varphi,\bar{h}_m,\bar{v}_m+\theta_1(\bar{v}-v_m),\varepsilon}{\partial v}[\frac{1}{\omega_0}\int\limits_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0}\int\limits_0^1 \frac{\partial P_1\left(\varphi,\varphi_1,\bar{h}_m+\theta(\bar{h}-\bar{h}_m)\right)}{\partial h}\times$$

$$\times(\bar{h}-\bar{h}_m)d\theta d\varphi_1]d\theta_1,$$

получим оценки

$$\left\|\rho_1^{(m)}\right\|\le\|C\|_0|Ch+\mathcal{F}+H|_0\sigma_1(m), \qquad (2.9)$$

$$\left\|\rho_1^{(m)}\right\|\le|\mathcal{F}|_1|Ch+\mathcal{F}+H|_0\sigma_1(m), \qquad (2.10)$$

$$\left\|\rho_1^{(m)}\right\|\le|H|_1[1+T_0|P|_1]||Ch+\mathcal{F}+H|_0\sigma_1(m)|. \qquad (2.11)$$

Принимая $\bar{\alpha}$ за приближенное решение уравнения (2.3) , то (2.7) можно представить в виде

$$\bar{\alpha}+\left[D^{(m)}\right]^{-1}\left[F_1^{(m)}(\bar{\alpha})+F_2^{(m)}(\bar{\alpha},\varepsilon)\right]=-\left[D^{(m)}\right]^{-1}(\rho_1^{(m)}+\rho_2^{(m)}+\rho_3^{(m)})$$

Отсюда на основании неравенств (2.9) -(2.11) получим

$\left\|\bar{\alpha}+\left[D^{(m)}\right]^{-1}\left[F_1^{(m)}(\bar{\alpha})+F_1^{(m)}(\bar{\alpha},\varepsilon)\right]\right\|\le MK|Ch+\mathcal{F}+H|_0\sigma_1(m)=\eta(\varepsilon),$

при $m\ge m_0$ *и* $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ где $\left|\left[D^{(m)}\right]^{-1}\right|\le M,$

$K=\|C\|_0+|\mathcal{F}|_1+|H|_1[1+T_0|P|_1].$

Определяем, область Δ_m вида

$$\Delta_m=\left\{\alpha:\|\alpha-\bar{\alpha}\|\le\frac{\delta_0-|Ch+\mathcal{F}+H|_0\sigma_1(m)}{\sqrt{2m+1}}\right\}, \qquad (2.12)$$

и составим частичную сумму ряда

$h=h(\varphi,\varepsilon)=a_0+\sqrt{2}\sum_{k=1}^m(a_k cosn\varphi+b_k sinn\varphi),$

для $\alpha\epsilon\Delta_m$ Тогда, учитывая, что $\left\|\bar{h}-\bar{h}_m\right\|_0=\|\alpha-\bar{\alpha}\|,$

$$\left|h_m-\bar{h}_m\right|_0\le\sqrt{2m+1}\|\alpha-\bar{\alpha}\| \quad и \quad \left|\bar{h}-\bar{h}_m\right|_0\le|Ch+\mathcal{F}+H|\sigma_1(m)$$

с учетом (2.12) имеем

$\left|\bar{h}-\bar{h}_m\right|_0\le\sqrt{2m+1}\|\alpha-\bar{\alpha}\|+|Ch+\mathcal{F}+H|_0\sigma_1(m)\le\delta_0.$

Отсюда следует $h(\varphi,\varepsilon)\in D$ для всех $\varphi\in\mathcal{T}_1$ *и* $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$.

Обозначим через $\Delta_{\delta_m}\in\Delta_m$ множество точек $\alpha\in\Delta_m$, для которых $\|\alpha-\bar{\alpha}\|\delta_m$.

Заметим, что для этого достаточно положить

$$\delta_m<\frac{\delta_0-|Ch+\mathcal{F}+H|_0\sigma_1(m)}{\sqrt{2m+1}}.$$

Теперь выбираем χ *и* ε достаточно малым и m_1 $(m_1\ge m_0)$ достаточно большим, чтобы при $m\ge m_1$, выполнялись неравенства

$$\frac{MK|Ch+\mathcal{F}+H|_0\sigma_1(m)}{1-\chi}<\frac{\delta_0-|Ch+\mathcal{F}+H|_0\sigma_1(m)}{\sqrt{2m+1}}, \qquad (2.13)$$

$$\left\|\frac{\partial F_1^{(m)}(\alpha)}{\partial\alpha}+\frac{\partial F_2^{(m)}(\alpha,\varepsilon)}{\partial\alpha}\right\|\le\frac{\chi}{M}. \qquad (2.14)$$

Такой выбор возможен, ибо $\frac{\sqrt{2m+1}}{m+1}\to 0$ *при* $m\to\infty$.

В качестве δ_m , можно взять выражение

$$\delta_m=\frac{\delta_0-|Ch+\mathcal{F}+H|_0\sigma_1(m)}{\sqrt{2m+1}}>\frac{\eta_m(\varepsilon)}{1-\chi} \qquad для\ \ m\ge m_1. \qquad (2.15)$$

Поскольку $\bar{h}(\varphi,0)=0$ и $\bar{h}_m(\varphi,\varepsilon)=S_m\bar{h}(\varphi,\varepsilon),$ то из этого следует, что

$\bar{\alpha}=\bar{\alpha}(\varepsilon)$ *и* $\bar{\alpha}(0)=0$. Так как $\frac{\partial\mathcal{F}(\varphi,0)}{\partial h}=0,$ то $\frac{\partial F_1^{(m)}(0)}{\partial\propto}=0.$

Таким образом, при $m\ge m_1$ *и* $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$ из неравенств (2.13) - (2.15) следует, что уравнение

$D_\alpha^{(m)}+F_1^{(m)}(\alpha)+F_2^{(m)}(\alpha,\varepsilon)=0$

удовлетворяет всем требованиям основной леммы, а следовательно, имеет только одно решение $\alpha=\alpha^0(\varepsilon)$ в области Δ_{δ_m}, для которого справедливо неравенство $\|\alpha^0(\varepsilon)-\bar{\alpha}(\varepsilon)\|\le\delta_m$.Следовательно, существует приближение Галеркина высокого порядка. Так как

$$\left\|\bar{h}-\bar{h}_m\right\|_0=\|\bar{\alpha}-\alpha^0\|, \quad \left|\bar{h}_m-h_m^0\right|_0\le\sqrt{2m+1}\|\bar{\alpha}-\alpha^0\| \quad и$$

$$\left|\bar{h}-\bar{h}_m\right|_0 \leq |Ch+\mathcal{F}+H|_0\sigma_1(m),$$

то из этих неравенств следует

$$\left|h_m^0(\varphi,\varepsilon)-\bar{h}(\varphi,\varepsilon)\right|_0 \ll \frac{\sqrt{2m+1}}{m+1}\frac{MK|Ch+\mathcal{F}+H|_0}{1-\chi}+\ |Ch+\mathcal{F}+H|_0\sigma_1(m).$$

Введя обозначения

$$\bar{M}(\varepsilon)=\frac{MK|Ch+\mathcal{F}+H|_0}{1-\chi},$$

получим оценки погрешности теоремы.

Так как $\alpha^0=\alpha^0(\varepsilon)$ $\quad и$ $\alpha^0(0)=0$, то отсюда следует $h_m^0(\varphi,0)=0.$

Теорема доказана.

Список литературы / References

1. *Урабе М.* Метод Галеркина для нелинейных периодических систем. Механика, 1966. 97. № 3. С. 3-34.
2. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. М.: Наука, 1987. 304 с.
3. *Алымбаев А.Т., Нуржанов О.А.* Численно-аналитический метод исследований автономных систем интегро-дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн., 1979. Т. 31. №5. С. 540-547.
4. *Митропольский Ю.А.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами / Ю.А. Митропольский, А.М. Самойленко, Д.И. Мартынюк. Киев: Наукова Думка, 1984. 16 с.