О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОНЕЧНЫМ ПОСЛЕДСТВИЕМ

Бапа А.

*Бапа кызы Айнура - магистр физико-математического образования, старший преподаватель,
кафедра высшей математики, технологии обучения математики и информатики, факультет физико-математический и естественно-технический,
Иссык-Кульский государственный университет им. К. Тыныстанова,
г. Каракол, Кыргызская Республика*

Аннотация: *в данной статье рассматривается система автономных интегро-дифференциальных уравнений с конечным последствием, содержащим малый параметр. Изучено периодическое решение при условии, когда вырожденное уравнение допускает однопараметрическое семейство периодических решений. Доказано утверждение существования периодического решения невозмущенной системы, при условии, когда существует приближенное периодическое решение построенная методом Галеркина. Получена оценка точности между точным и приближенным решениями.*
Ключевые слова: *метод Галеркина, система автономных интегро-дифференциальных уравнений, периодические решения, автономные системы, функция Грина.*

PERIODIC SOLUTION OF A SYSTEM OF AUTONOMOUS INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A FINITE CONSEQUENCE

Bapa A.

*Bapa kyzy Ainura - Master of Physics and Mathematics Education, Senior Lecturer,
DEPARTMENT OF HIGHER MATHEMATICS, TEACHING TECHNOLOGIES FOR MATHEMATICS AND INFORMATICS, FACULTY OF PHYSICS, MATHEMATICS AND NATURAL TECHNOLOGY,
ISSYK-KUL STATE UNIVERSITY NAMED AFTER K. TYNYSTANOV,
KARAKOL,REPUBLIC OF KYRGYZSTAN*

Abstract: *this article considers a system of autonomous integro-differential equations with a finite consequence containing a small parameter. A periodic solution is studied under the condition that the degenerate equation admits a one-parameter family of periodic solutions. Statements of the existence of a periodic solution of the unperturbed system are proved, provided that there is an approximate periodic solution constructed by the Galerkin method. An estimate of the accuracy between the exact and approximate solutions is obtained.*
Keywords: *Galerkin method, system of autonomous integro-differential equations, periodic solutions, autonomous systems, Green's function.*

УДК 517.928

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{X}(x) + \varepsilon f(x, \int_t^{t+T_0} P(t-s, x(s)ds, \varepsilon), \qquad (1)$$

где x-n-мерный вектор, X, f, P-n-мерные вектор-функции, - малый параметр,
T_0-фиксированное положительное число.

Относительно вектор-функции предпологается:

$$\mathrm{X}(x) \in C^2_{xx}(\Omega), f(x,y,\varepsilon) \in C^1_{xy}(\Omega \times \Omega_1 \times E), P(t-s,x) \in C\,^1_x(R \times R \times \Omega),$$

где: Ω- ограниченная выпуклая область евклидового пространства $E_n, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ Ω_1-шар в пространстве E_n.

Предположим, что невозмущенная система

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{X}(x), \qquad (2)$$

имеет $2\pi/\omega_0$- периодическое по t решение $x = x_0(\omega_0, t)$.

В окрестности периодического решения системы (2), вводим преобразования в системе (1) вида [1]

$x(\varphi) = x_0(\varphi) + B(\varphi)h$, $\varphi = \omega_0 t$,

где: $B(\varphi)$ –некоторая $n \times (n-1)$-мерная матрица, $h-(n-1)$- мерный вектор функция. В переменных φ, h систему (1), приводим системе уравнений относительно углового $\varphi = \varphi(t, \varepsilon)$ и нормального $h = h(t,\varepsilon)$ переменного вида

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \mathcal{F}_1(\varphi, h) + f_1(\varphi, h, \frac{1}{\omega_0}\int\limits_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1))d\varphi_1, \varepsilon)$$

$$\frac{dh}{dt} = G_1(\varphi, h) + g_1(\varphi, h, \int\limits_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1))d\varphi_1, \varepsilon), \qquad (3)$$

где: $\begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 \\ G_1 \end{pmatrix} = \Phi^{-1}(\varphi, h)\left(X(x_0(\varphi) + B(\varphi)h) - X(x_0(\varphi)) - \frac{dB(\varphi)}{d\varphi} h\omega_0\right)$,

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} = \Phi^{-1}(\varphi, h)\varepsilon f(x_0(\varphi) + (\varphi), h, \frac{1}{\omega_0} \int\limits_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P(\frac{\varphi - \varphi_1}{\omega_0}, x_0(\varphi_1) + B(\varphi_1)h(\varphi_1))d\varphi_1),$$

$$\Phi(\varphi, h) = \left(\frac{dx_0(\varphi)}{d\varphi} + \frac{dB(\varphi)}{d\varphi} h, B(\varphi)\right).$$

На основании сделанных относительно правой части системы (1) условий, из (3) можем образовывать периодической по φ периода 2π правой частью, систему уравнений

$$\frac{dh}{d\varphi} = C(\varphi)h + \mathcal{F}(\varphi, h) + H(\varphi, h, \frac{1}{\omega_0} \int\limits_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1))d\varphi_1, \varepsilon), \qquad (4)$$

где $\quad C(\varphi) = \frac{1}{\omega_0}\frac{\partial G_1(\varphi,h)}{\partial h}, \qquad \mathcal{F}(\varphi, h) = O(|h|^2)$,

$$H(\varphi, h, \frac{1}{\omega_0} \int\limits_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1))d\varphi_1, \varepsilon) =$$

$$= -\frac{G_1(\varphi, h) f_1\left(\varphi, h, \frac{1}{\omega_0}\int_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1))d\varphi_1, 0\right)/\partial\varepsilon}{\left(\omega_0 + \mathcal{F}_1(\varphi, h)\right)^2}\varepsilon +$$

$$+ \frac{g_1\left(\varphi, h, \frac{1}{\omega_0}\int_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1))d\varphi_1, \varepsilon\right)}{\omega_0 + \mathcal{F}_1(\varphi, h) + f_1\left(\varphi, h, \frac{1}{\omega_0}\int_{\varphi}^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1(\varphi, \varphi_1, h(\varphi_1))d\varphi_1, \varepsilon\right)} + O(\varepsilon^2),$$

Если система (4) имеет 2π периодическое по φ решение $h = h(\varphi, \varepsilon)$, то из первого уравнения системы (3) можем определить $\varphi = \varphi(t, \varepsilon)$ и, следовательно, можем получить $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическое решение $h = h(\varphi(t, \varepsilon), \varepsilon)$ системы уравнений (4), где $\omega = \omega(\varepsilon)$ корень уравнения $\varphi(\omega(\varepsilon), \varepsilon) = 2\pi$

Докажем утверждение существования точного решения системы (4), в окрестности приближенного решения, найденного методом Галеркина.

Теорема. Предположим, что система (4) удовлетворяет следующим требованиям:

а) для некоторого целого $m \geq m_0$ существует приближенное 2π-периодическое решение по Галеркину

$$h_m(\varphi, \varepsilon) = a_0(\varepsilon) + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{m}(a_n(\varepsilon)cosn\varphi + b_n(\varepsilon)sinn\varphi) \qquad (\,h_m(\varphi, 0) = 0);$$

б) Линейная система

$$\frac{dh(\varphi)}{d\varphi} = C(\varphi)h(\varphi),$$

имеет функцию Грина $G(\varphi, \tau)$, об ограниченных решениях удовлетворяющую неравенству

$\|G(\varphi, \tau)\| \leq M_0 e^{-\lambda_0|\varphi-\tau|}, \qquad \varphi, \tau \epsilon \mathcal{T}_1 = (-\infty, \infty)$, для $\varphi \neq \tau$, где M_0, λ_0-положительные постоянные, при этом

$$G(\varphi, \tau)|_{\varphi=\tau+0} - G(\varphi, \tau)|_{\varphi=\tau-0} = I,$$

I-единичная матрица.

в) Существует такая малая ε_0, а также достаточно большое m_0, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $m \geq m_0$ выполняются условии

$$\chi = \frac{2M_0}{\lambda_0}|\mathcal{F}_n|_1 + |H_n|_1 + T|H_n|_1|P_{1n}|_1 < 1,$$

$\frac{2M_0|Ch+\mathcal{F}+H|_1\sigma(m)}{\lambda_0} < \delta, \qquad \delta$-бесконечно малая величина

Тогда система уравнений (1) в окрестности приближенного $h_m(\varphi, \varepsilon)$ имеет единственное 2π-периодическое решение $h_m(\varphi, \varepsilon)$ такое, что справедлива оценка

$|h(\varphi, \varepsilon) - h_m(\varphi, \varepsilon)|_0 \leq \frac{2M_0|Ch+\mathcal{F}+H|\sigma(m)}{\lambda_0(1-\chi_1)}$, при $h_0 \in D_\delta \subset D$.

где $\qquad |f|_r = \max\limits_{\mathcal{T}\times D\times D_1} \|f^r(\varphi,h,u,\varepsilon)\|$,

$|f|_0 = \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f\|^2 d\varphi\right]^{\frac{1}{2}}$, $\mathcal{T} = [0,2\pi]$, $\quad h \in D \subset E_{n-1}$, $u \in D_1$-шар в D,

D_δ −множество точек области D которая принадлежит со своей δ-области.

Доказательство. С учетом условию б) из системы (4) получим систему интегральных урвнений

$$h(\varphi,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\varphi,\tau)[\mathcal{F}(\tau,h(\tau,\varepsilon)) +$$
$$+H(\tau,h(\tau,\varepsilon),\frac{1}{\omega_0}\int_\tau^{\tau+\omega_0 T} P_1(\tau,\tau_1,h(\tau_1,\varepsilon))d\tau_1,\varepsilon)]d\tau \qquad (5)$$

Решаем интегральную уравнению методом последовательных приближений, взявь за нулевое приближение, приближение Галеркина(условие а)) с достаточно большим m :

$$h_0(\varphi,\varepsilon) = h_m(\varphi,\varepsilon),$$
$$h_{k+1}(\varphi,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\varphi,\tau)\left[\mathcal{F}(\tau,h(\tau,\varepsilon)) + +H\left(\tau,h_k(\tau,\varepsilon),\frac{1}{\omega_0}\int_\tau^{\tau+\omega_0 T} P_1(\tau,\tau_1,h_k(\tau_1,\varepsilon))d\tau_1,\varepsilon\right)d\tau_1\right]d\tau_1 ,$$
$$k=1,2,3\ldots \qquad (6)$$

Согласно методу Галеркина функция $h_0(\varphi,\varepsilon) = h_m(\varphi,\varepsilon)$ удовлетворяет систему

$$\frac{dh_m(\varphi,\varepsilon)}{d\varphi} = S_m\left[C(\varphi)h_m(\varphi,\varepsilon) + \mathcal{F}(\varphi,h_m(\varphi,\varepsilon)) + H\left(\varphi,h_m(\varphi,\varepsilon),\frac{1}{\omega_0}\int\limits_\varphi^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1(\varphi,\varphi_1,h_m(\varphi_1,\varepsilon))d\varphi_1,\varepsilon\right)\right].$$

Представим эту систему в виде

$$\frac{dh_m(\varphi,\varepsilon)}{d\varphi} = C(\varphi)h_m(\varphi,\varepsilon) - \Big(C(\varphi)h_m(\varphi,\varepsilon) - S_m\big(C(\varphi)h_m(\varphi,\varepsilon)\big) + \mathcal{F}(\varphi,h_m(\varphi,\varepsilon)) - (\mathcal{F}(\varphi,h_m(\varphi,\varepsilon)) -$$
$$-S_m\mathcal{F}(\varphi,h_m(\varphi,\varepsilon)))\Big) + H\left(\varphi,h_m(\varphi,\varepsilon),\frac{1}{\omega_0}\int_\varphi^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1(\varphi,\varphi_1,h_m(\varphi_1,\varepsilon))d\varphi_1,\varepsilon\right) -$$
$$-\left(H\left(\varphi,h_m(\varphi,\varepsilon),\frac{1}{\omega_0}\int_\varphi^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1(\varphi,\varphi_1,h_m(\varphi_1,\varepsilon))d\varphi_1,\varepsilon\right) -\right.$$
$$\left.-S_m H\left(\varphi,h_m(\varphi,\varepsilon),\frac{1}{\omega_0}\int_\varphi^{\varphi+\omega_0 T_0} P_1(\varphi,\varphi_1,h_m(\varphi_1,\varepsilon))d\varphi_1,\varepsilon\right)\right) \qquad (7)$$

С учетом б) из (7) имеем

$$h_m(\varphi,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\varphi,\tau)[\mathcal{F}(\tau,h_m(\tau,\varepsilon) + +H\left(\tau,h_m(\tau,\varepsilon),\frac{1}{\omega_0}\int_\tau^{\tau+\omega_0 T} P_1(\tau,\varphi_1,h_m(\varphi_1,\varepsilon))d\varphi_1,\varepsilon\right) -$$
$$\big(C(\tau)h_m(\tau,\varepsilon) - S_m C(\tau)h_m(\tau,\varepsilon)\big) - (\mathcal{F}_m - S_m\mathcal{F}_m) - (H_m - H_m S_m)]d\tau_1 \qquad (8)$$

Оценим разность $h_1(\varphi,\varepsilon) - h_0(\varphi,\varepsilon)$. Из (6), (8) получим равенство

$$h_1(\varphi,\varepsilon) - h_0(\varphi,\varepsilon) == -\int\limits_{-\infty}^{\infty} C(\varphi,\tau)[C(\tau)h_m(\tau,\varepsilon) - S_m C(\tau)h_m(\tau,\varepsilon) + \mathcal{F}_m - S_m\mathcal{F}_m + H_m - H_m S_m]d\tau.$$

Отсюда с учетом условию б) получим

$$|h_1(\varphi,\varepsilon) - h_0(\varphi,\varepsilon)| \le M_0\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_0|\varphi-\tau|}[Ch_m + \mathcal{F}_m + H_m - S_m(Ch_m + +\mathcal{F}_m + H_m)|_0]\ d\tau. \qquad (9)$$

Далее с учетом оценки

$$|\psi - S_m\psi|_0 \le \sigma(m)|d\psi|d\varphi|_0 = \sigma(m)|\psi|_1, \qquad (10)$$

Из (9) получим

$$|h_1(\varphi,\varepsilon) - h_0(\varphi,\varepsilon)| \le M_0\sigma(m)|Ch + \mathcal{F} + H|_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_0|\varphi-\tau|}d\tau = \frac{2M_0}{\lambda_0}|Ch + \mathcal{F} + H|_1\sigma(m).$$

Оценим разность

$$
\begin{aligned}
&|h_{k+1}(\varphi,\varepsilon)-h_k(\varphi,\varepsilon)| = \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} G(\varphi,\tau)[\mathcal{F}(\tau,h_k(\tau,\varepsilon)) - \mathcal{F}(\tau,h_{k-1}(\tau,\varepsilon)) + \\
&\quad + H\left(\tau,h_k(\tau,\varepsilon),\frac{1}{\omega_0}\int_{\tau}^{\tau+\omega_0 T} P_1(\tau,\tau_1,h_k(\tau_1,\varepsilon))d\tau_1,\varepsilon\right) \\
&\quad - H\left(\tau,h_{k-1}(\tau,\varepsilon),\frac{1}{\omega_0}\int_{\tau}^{\tau+\omega_0 T} P_1(\tau,\tau_1,h_{k-1}(\tau,\varepsilon))d\tau_1,\varepsilon\right)d\tau \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} G(\varphi,\tau)\left\{\frac{\partial}{\partial h}F(\tau,h_{k-1}+\theta(h_k-h_{k-1}))(h_k-h_{k-1})d\theta\right. \\
&\quad + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial h}H(\tau,h_{k-1}+\theta(h_k-h_{k-1}),u,\varepsilon)(h_k-h_{k-1})d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u}H(\tau,h,u_{k-1}+\theta_1(u_k-u_{k-1}),\varepsilon) \\
&\quad \left.\cdot\,[\frac{1}{\omega_0}\int_{\tau}^{\tau+\omega_0 T}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial h}P_1\;_1\left(\tau,\varphi_1,h_{k-1}+\theta(h_k-h_{k-1})\right)(h_k-h_{k-1})d\theta d\varphi_1]d\theta_1\right\}d\tau.
\end{aligned}
$$

С учетом условию б) и в) имеем

$$
|h_1(\varphi,\varepsilon)-h_0(\varphi,\varepsilon)| \le \frac{2M_0}{\lambda_0}[|\mathcal{F}_h|_1+|H_h|_1+T|H_u|_1\cdot|P_{1h}|_1]|h_k-h_{k-1}|_0 \le
$$

$\le \chi|h_k-h_{k-1}|_0.\qquad k=1,2,\ldots.$

Отсюда по индукции получим

$$
|h_{k+1}-h_k|_0 \le |h_k-h_{k-1}|_0 \le \chi^2|h_{k-1}-h_{k-2}|_0 \le \cdots \le \chi^k|h_1-h_0|_0 \le \chi^k\frac{2M_0}{\lambda_0}|Ch+\mathcal{F}+H|_1\sigma(m),
$$

Оценим разность $|h_{k+n}-h_{k+n-1}+h_{k+n-1}-h_{k+n-2}+\cdots+h_{k+1}-h_k|_0 \le |h_{k+n}-h_{k+n-1}|_0 + |h_{k+n-1}-h_{k+n-2}|_0+\cdots+|h_{k+1}-h_k| \le$

$$
\le (1+\chi+\cdots+\chi^{k-1}+\chi^k+\cdots)\chi^k\frac{2M_0}{\lambda_0}|Ch+\mathcal{F}+H|\sigma(m) \le\le \frac{2\chi^k M_0}{\lambda_0(1-\chi)}|Ch+\mathcal{F}+H|\sigma(m).
$$

Отсюда имеем

$|h_{k+n}-h_k|_0 \le \frac{2\chi^k M_0}{\lambda_0(1-\chi)}|Ch+\mathcal{F}+H|_0\sigma(m)$ при $n\to\infty$.

Следовательно, при $k=0$, имеет место оценка

$|h(\varphi,\varepsilon)-h_k(\varphi,\varepsilon)|_0 \le \frac{2\chi^k M_0}{\lambda_0(1-\chi)}|Ch+\mathcal{F}+H|_0\sigma(m)$ при $m\to\infty$.

Далее, пусть функции $h(\varphi,\varepsilon)$ *и* $\overline{h}(\varphi,\varepsilon)$ являются решениями системы (1). Представляя разность в виде

$$
h-\overline{h} = \int_{-\infty}^{\infty} G(\varphi,\tau)\left\{\int_0^1 \frac{\partial\mathcal{F}(\tau,\overline{h}+\theta(h-\overline{h}))}{\partial h}(h-\overline{h})d\theta + \int_0^1\frac{\partial H(\tau,\overline{h}+\theta(h-\overline{h}),u,\varepsilon)}{\partial h}(h-\overline{h})d\theta + \right.
$$

$$
\left.\int_0^1\frac{\partial H(\tau,h+\theta(h-\overline{h}),u,\varepsilon)}{\partial u}(h-\overline{h})d\theta + \int_0^1\frac{\partial H(\tau,h,\overline{u}+\theta_1(u-\overline{u},\varepsilon))}{\partial u}\cdot[\frac{1}{\omega_0}\int_{\tau}^{\tau+\omega_0 T}\int_0^1\frac{\partial P_1(\tau,\varphi_1,\overline{h}+\theta(h-\overline{h}))}{\partial h}_1(h-\overline{h})d\theta d\varphi_1]d\theta\right\}d\tau.
$$

С учетом условии в)

$|h-\overline{h}|_0 < \chi|h-\overline{h}|_0 < \cdots < \chi^k|h-\overline{h}|_0.$

Отсюда при $k\to\infty$ имеем

$|h(\varphi,\varepsilon)-\overline{h}(\varphi,\varepsilon)| = 0$ т.е. $h(\varphi,\varepsilon)=\overline{h}(\varphi,\varepsilon)$

Теорема доказана.

Список литературы / References

1. *Урабе М.* Метод Галеркина для нелинейных периодических систем. Механика, 1966. 97. № 3. С. 3-34.

2. *Алымбаев А.Т., Бапа к.А.* Периодическое решение системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с конечным последствием // Вестник науки и образования. № 1 (121), 2022. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://scientificjournal.ru/images/PDF/2022/121/ob-osobennostyakh-smeshannogo.pdf/ (дата обращения: 02.02.2022).
3. *Алымбаев А.Т., Нуржанов О.А.* Численно-аналитический метод исследований автономных систем интегро-дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн., 1979. Т. 31. № 5. С. 540-547.
4. *Митропольский Ю.А.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами/ Ю.А Митропольский, А.М. Самойленко, Д.И. Мартынюк. Киев: Наукова Думка, 1984. 216 с.
5. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. М.: Наука, 1987. 304 с.