

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ ПРИ ИЗГИБЕ

Погосян А.Г.¹, Бадасян Т.С.² Email: Poghosyan683@scientifictext.ru

¹Погосян Аревшат Гургенович - кандидат физико-математических наук, доцент,
факультет компьютерных наук;

²Бадасян Тигран Смбагович – магистрант,
факультет прикладной математики и физики,
Национальный политехнический университет Армении,
г. Ереван, Республика Армения

Аннотация: предлагается модель решения задачи оптимизации, которая позволяет использовать метод безусловной минимизации Нелдера - Мида в случае наличия ограничений как в виде равенств, так и неравенств. Применение данной модели иллюстрируется на примере оптимального проектирования цилиндрической панели изготовленной из изотропного материала, при изгибе. Определяются оптимальные значения геометрических параметров панели, обеспечивающие минимальное значение прогиба при постоянном весе, равном весу панели постоянной толщины, и ее заданных габаритных размерах.

Ключевые слова: оптимизация, изотроп материал, нагрузка, панель, изгиб.

THE APPLICATION OF THE METHOD OF UNCERTAIN MINIMIZATION TO SOLVING THE PROBLEM OF OPTIMAL DESIGN CYLINDER PANEL WHEN BENDING

Poghosyan A.G.¹, Badasyan T.S.²

¹Poghosyan Arevshat Gurgenovitch - Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE;

²Badasyan Tigran Smbatovich - Undergraduate,
FACULTY OF APPLIED MATHEMATICS AND PHYSICS,
NATIONAL POLYTECHNIC UNIVERSITY OF ARMENIA,
YEREVAN, REPUBLIC OF ARMENIA

Abstract: as is known, the method of unconstrained minimization of Nelder - Mead developed to solve optimization problems without constraints. In this paper a model for solving the optimization problem, which allows the use of a method of unconstrained minimization Nelder - Mead in complying with the restrictions in the form of equations and inequalities. cylinder panels: The application of this model is illustrated by the optimal design of a cylindrical panels made of isotropic material. The optimum values of the geometrical parameters of the plate to ensure minimum deflection at constant weight equal to the weight of the plate thickness is constant, and given footprint.

Keywords: optimization, isotropic material, load, bending, panel, bending.

УДК 532.4

Постановка задачи оптимизации: Многие задачи оптимального проектирования ребристых пластин, изготовленных из *изотропного* материала, приводятся к задаче нелинейного программирования при наличии ограничений в виде равенств и неравенств. В общем случае эта задача формулируется следующим образом:

Найти

$$\min_u \max_v f(\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \quad \bar{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

при ограничениях

$$H_i(\bar{u}, \bar{v}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$g_j(\bar{u}, \bar{v}) \geq 0, \quad j = m + 1, m + 2, \dots, r,$$

где $f(\bar{u}, \bar{v})$ - целевая функция; \bar{u}, \bar{v} - векторы управления.

Сложность решения задач экспоненциально возрастает с увеличением количества переменных или ограничений. На стадии подготовки задачи к решению целесообразно модифицировать модель с целью уменьшения количества ограничений, особенно нелинейных, и переменных. Размерность и число

ограничений в виде равенств можно существенно сократить, решая явно или неявно некоторые из них и используя полученные решения для исключения переменных. При этом остается ряд ограничений, которые не удаётся непосредственно решить относительно одной или большего числа переменных. В таком случае возможны два подхода: эти ограничения решаются итеративно относительно переменных, или же оставшиеся уравнения явно учитываются как ограничения в виде равенств.

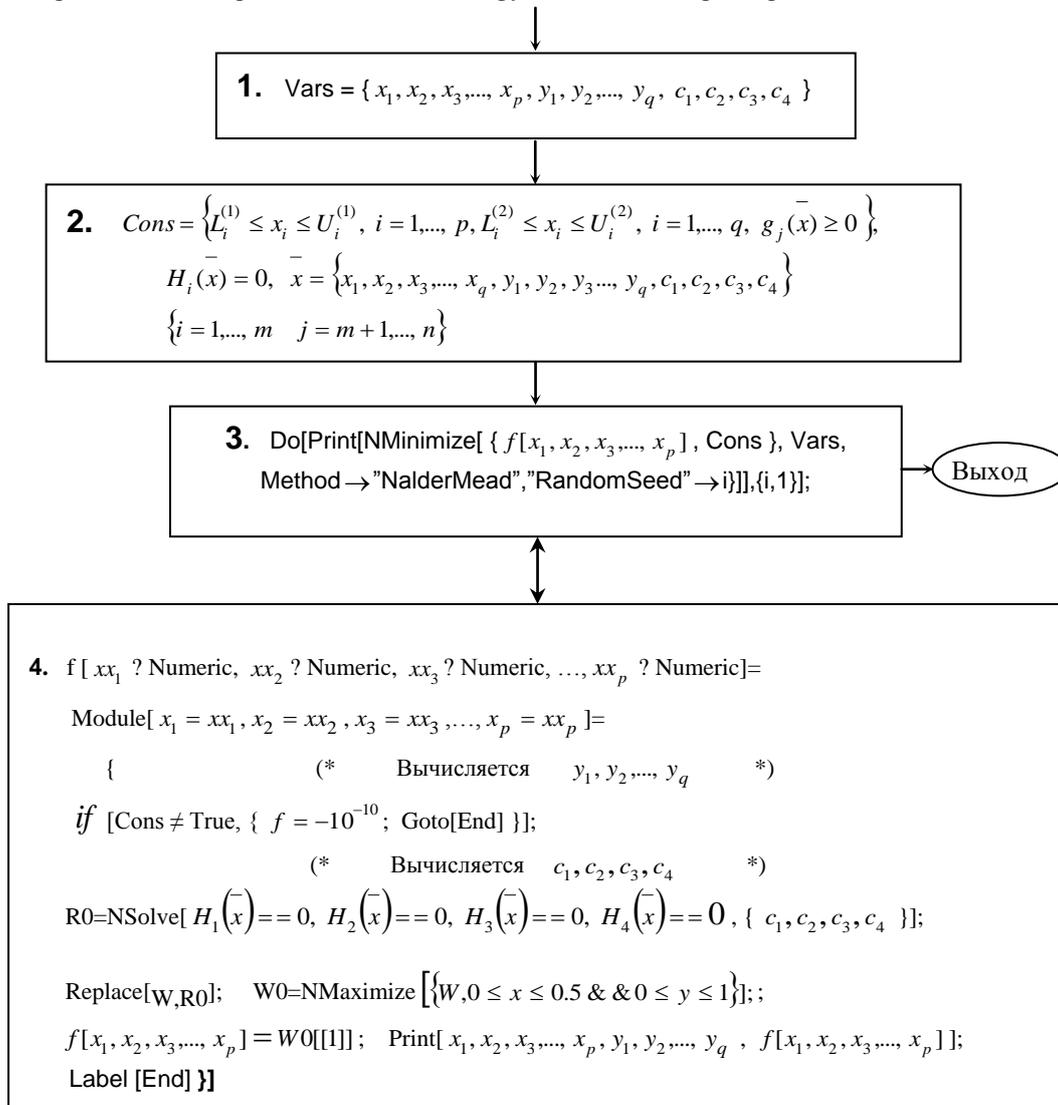
Решение поставленной задачи минимакса получается в результате решения последовательных задач минимизации и максимизации с ограничениями.

Основная идея предлагаемой модели состоит в том, чтобы найти решение общей задачи путём разделения переменных на две группы. В одну группу объединяются переменные x_1, x_2, \dots, x_p , значения которых невозможно исключить из соответствующих ограничений, а в другую – переменные $y_1, y_2, \dots, y_q, c_1, c_2, c_3, c_4$ значения которых сравнительно легко вычислить. Обе задачи решаются раздельно, обеспечивая их связь путем проведения соответствующих координирующих вычислений.

Задача минимизации решается с помощью метода Нелдера-Мида [4]. При этом в предлагаемом способе при построении симплекса на каждом этапе минимизации исключается вершина многогранника, где нарушаются ограничения.

Приведена блок-схема программы, с помощью которой выполняются численные расчеты. В блок-схеме:

- 1 - выделение варьируемых параметров,
- 2 - формулировка ограничений,
- 3 - выбор метода Нелдера-Мида, где целевая функция имеет параметрический вид. Согласно методу



Нелдера-Мида, при поиске минимума целевой функции $f[x_1, x_2, \dots, x_p]$, где $x \in E^p$ строится

многогранник с $p+1$ вершинами. Процедурами растяжения, сжатия и редукции строится новая вершина, и в каждой вершине с помощью модуля вычисляется значение целевой функции (пункт 4):

$$\max_z f[x_1, x_2, \dots, x_p], \text{ где } \bar{z} = \{y_1, y_2, \dots, y_q, c_1, c_2, c_3, c_4\}.$$

Итерационный процесс завершается тогда, когда вершины симплекса и вычисленные в них значения функции при сравнении с предыдущей итерацией удовлетворяют некоторым условиям сходимости,

4 - формулировка целевой функции в параметрическом виде (Module $f[x_1, x_2, \dots, x_p]$), где и решается задача максимизации. В каждой вершине симплекса проводятся последовательно две операции: включение вершин в допустимую область и исключение вершин, если нарушается какое-либо дополнительное условие где принимается $f[x_1, x_2, \dots, x_p] = -10^{-10}$.

В качестве приложения предлагаемой модели решается задача оптимального проектирования пологой цилиндрической оболочки открытого профиля кусочно постоянной толщины, под действием внутреннего давления при изгибе. Математическая модель задачи определения напряженно-деформированного состояния оболочки описывается дифференциальными уравнениями относительно потенциальных функций для каждой из составляющих участков оболочки, условиями сопряжения на линиях их раздела и граничными условиями на ее контуре. Определение оптимальных параметров панели приводится к задаче нелинейного программирования, которая решается методом деформируемого многогранника [4] в сочетании с методом прямого поиска [4] и с применением пакета параллельных вычислений в среде пакета *WolframMatematika*[4].

Вопросы оптимального проектирования пластин и оболочек кусочно-постоянной толщины исследовались в работах [1-3].

Постановка задачи. Рассматривается полая цилиндрическая оболочка размерами в плане $2L \times b$, шарнирно опертая по сторонам $y=0$ и $y=b$ и жестко закрепленная по краям $x=\pm L$, под действием внутреннего давления $q(y)$. Предполагается, что на участке $-a \leq x \leq a$ ступенчатая оболочка имеет толщину h_2 , а на участках $-L \leq x \leq -a$ и $a \leq x \leq L$ - толщину h_1 (рис. 1).

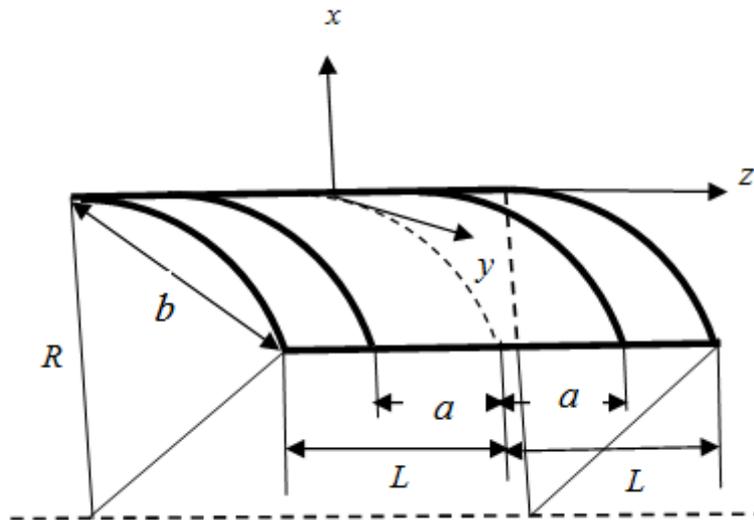


Рис. 1. Расчетная схема оболочки

Ставится задача определения оптимальных значений параметров a , h_1 , h_2 , обеспечивающих минимальное значение наибольшего прогиба оболочки при постоянном весе, равном весу оболочки постоянной толщины h_0 , и заданных габаритных размерах $\xi = 2L/b$.

Определение напряженно-деформированного состояния оболочки. Задача определения напряженно деформированного состояния оболочки кусочно постоянной толщины решается для каждой из ее областей ($p=1, 2$), соответствующих толщинам h_1 и h_2 , с удовлетворением условий сопряжения на линии их раздела. При этом, ввиду симметрии, рассматривается правая половина оболочки ($x \geq 0$).

Согласно теории весьма пологих оболочек [1] задача сводится к определению для каждого из участков оболочки ($p=1, 2$) потенциальных функций $\Phi_p(x, y)$, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{D^{(p)}}{E_p h_p} \nabla^4 \nabla^4 \Phi_p + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 \Phi_p}{\partial x^4} = q, \quad (p=1, 2) \quad (1)$$

где: $D^{(p)} = \frac{E_p h_p^3}{12(1-\nu_p^2)}$ - жесткости составляющих участков оболочки, E_p и ν_p - упругие постоянные материалов,

$$\nabla^8 = \frac{\partial^8}{\partial x^8} + 4 \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + 6 \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + 4 \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{\partial^8}{\partial y^8}.$$

Выражения перемещений оболочки через потенциальную функцию Φ_p ($p=1, 2$) представляются в виде:

$$u_p = -\frac{1}{E_p h_p} \frac{1}{R} \left(\nu_p \frac{\partial^3 \Phi_p}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 \Phi_p}{\partial x \partial y^2} \right), \quad v_p = -\frac{1}{E_p h_p} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^3 \Phi_p}{\partial y^3} + (2 + \nu_p) \frac{\partial^3 \Phi_p}{\partial x^2 \partial y} \right), \quad (2)$$

$$w_p = \frac{1}{E_p h_p} \left(\frac{d^4 \Phi_p}{dx^4} + \frac{d^4 \Phi_p}{dy^4} + 2 \frac{d^4 \Phi_p}{dx^2 dy^2} \right).$$

Внутренние усилия оболочки определяются по формулам:

$$T_x^{(p)} = \frac{1}{R} \frac{\partial^4 \Phi_p}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad T_y^{(p)} = \frac{1}{R} \frac{\partial^4 \Phi_p}{\partial x^4},$$

$$S^{(p)} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^4 \Phi_p}{\partial x^3 \partial y}, \quad H^{(p)} = -D^{(p)} (1 - \nu_p) \frac{\partial^2 w_p}{\partial x \partial y}, \quad (3)$$

$$M_x^{(p)} = -D^{(p)} \left(\frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2} + \nu_p \frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} \right), \quad M_y^{(p)} = -D^{(p)} \left(\frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} + \nu_p \frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2} \right),$$

$$N_x^{(p)} = -D^{(p)} \left(\frac{\partial^3 w_p}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_p}{\partial x \partial y^2} \right) = -D^{(p)} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w_p),$$

$$N_y^{(p)} = -D^{(p)} \left(\frac{\partial^3 w_p}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w_p}{\partial x^2 \partial y} \right) = -D^{(p)} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w_p).$$

Граничные условия оболочки запишутся в виде:

- шарнирного опирания на сторонах $y=0$ и $y=b$

$$w_p = 0, \quad u_p = 0, \quad T_2^{(p)} = 0, \quad M_2^{(p)} = 0, \quad (p=1, 2), \quad (4)$$

- симметрии на линии $x=0$

$$u_2 = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0, \quad S^{(2)} + \frac{H^{(2)}}{R} = 0, \quad N_1^{(2)} + \frac{\partial H^{(2)}}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

- заделки на стороне $x=L$

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

- сопряжения на линии $x=a$

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, \quad T_x^{(1)} = T_x^{(2)}, \quad M_x^{(1)} = M_x^{(2)},$$

$$S^{(1)} + \frac{H^{(1)}}{R} = S^{(2)} + \frac{H^{(2)}}{R}, \quad N_x^{(1)} + \frac{\partial H^{(1)}}{\partial y} = N_x^{(2)} + \frac{\partial H^{(2)}}{\partial y}. \quad (7)$$

Разлагая функцию нагрузки в ряд:

$$q(y) = \sum_1^{\infty} q_m \sin \lambda_m y, \quad q_m = \frac{2}{b} \int_0^b q(y) \sin \lambda_m y dy, \quad \lambda_m = \frac{\pi m}{b},$$

решения уравнений (1), удовлетворяющие условиям (4), представляются в виде

$$\Phi_p = \frac{E_p h_p}{D^{(p)}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_m}{\lambda_m^8} \sin \lambda_m y + \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{pm} \sin \lambda_m y, \quad (p=1,2) \quad (8)$$

где:

$$\begin{aligned} \Phi_{pm} = \sum_{j=1}^8 C_{jm}^{(p)} e^{\alpha_{pj} \lambda_m x} = & C_{1m}^{(p)} e^{\alpha_{p1} \lambda_m x} + C_{2m}^{(p)} e^{\alpha_{p2} \lambda_m x} + C_{3m}^{(p)} e^{\alpha_{p3} \lambda_m x} + C_{4m}^{(p)} e^{\alpha_{p4} \lambda_m x} + \\ & + C_{5m}^{(p)} e^{\alpha_{p5} \lambda_m x} + C_{6m}^{(p)} e^{\alpha_{p6} \lambda_m x} + C_{7m}^{(p)} e^{\alpha_{p7} \lambda_m x} + C_{8m}^{(p)} e^{\alpha_{p8} \lambda_m x} \end{aligned} \quad (9)$$

Коэффициенты α_{pj} являются корнями характеристического уравнения:

$$(\alpha^2 - 1)^4 + \frac{12(1 - \nu^2)}{R^2 h^2 \lambda_m^4} \alpha^4 = 0. \quad (10)$$

Подставляя (8) в уравнение (2), для функции w_p получим следующие выражения:

$$w_p = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_m}{\lambda_m^4 D^{(p)}} \sin \lambda_m y + \sum_{m=1}^{\infty} w_{pm} \sin \lambda_m y. \quad (11)$$

$$\text{где: } w_{pm} = \frac{1}{E_p h_p} \left(\frac{d^4 \Phi_{pm}}{dx^4} + \lambda_m^4 \Phi_{pm} - 2\lambda_m^2 \frac{d^2 \Phi_{pm}}{dx^2} \right).$$

Подстановкой (9) и (14) в условия (4) – (7), определяются значения коэффициентов $C_{jm}^{(p)}$ после чего по формулам (2) и (3) определяются все расчетные величины.

Оптимизация оболочки по критерию жесткости. Определение оптимальных параметров оболочки a, h_1, h_2 , при которых наибольшие прогибы конструкции, при неизменном весе, равном весу оболочки постоянной толщины h_0 , и заданных габаритных размерах $\xi = 2L/b$, достигают наименьшего значения, сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

Найти:

$$\min_x \max_p w_p, \quad \bar{x} = \{a, h_1, h_2\}, \quad (p=1,2), \quad (12)$$

при ограничениях:

$$L(h_1 - h_0) = a(h_1 - h_2), \quad (13)$$

$$f/b \leq 0.2, \quad 0.01\delta_1 \leq h_1 \leq 0.2\delta_1, \quad 0.01\delta_2 \leq h_2 \leq 0.2\delta_2. \quad (14)$$

Здесь w_p - целевая функция, определяемая из (2), \bar{x} - вектор управления. Ограничение (13) следует из условия постоянства веса конструкции кусочно-постоянной толщины, равном весу оболочки постоянной толщины h_0 . Ограничения (14) обусловлены пределами применимости теории тонких пологих оболочек. Здесь f - стрела подъема оболочки, $\delta_1 = L - a$ при $L - a \leq b$, $\delta_1 = b$ при $L - a \geq b$, $\delta_2 = 2a$ при $2a \leq b$, $\delta_2 = b$ при $2a \geq b$.

Задача (16)-(18) решается методом деформируемого многогранника (МДМ) в сочетании с методом прямого поиска [4].

Численные расчеты произведены для случая, когда на оболочке действует равномерно распределенная нагрузка $q(y) = q_0 = Const$ при $\bar{h}_0 = h_0/b = 0.02$, $\xi = 2L/b$.

Вычислены оптимальные значения параметров $\bar{a} = a/2L$, $\bar{h}_1 = h_1/b$, $\bar{h}_2 = h_2/b$, обеспечивающие наименьшее значение наибольшего прогиба $\max_p \bar{w}_p = w_p \frac{D_0}{q_k b^4}$, $(p=1,2)$

панели, где $D_0 = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$, и соответствующие наибольшие прогибы на каждом из ее участков.

Полученные результаты приведены в табл. 1. Там же, для сравнения, приведены значения приведенных прогибов \bar{w}_0 для равновесной пластинки постоянной толщины h_0 .

Таблица 1. Оптимальные параметры цилиндрической панели

\bar{h}_0	ξ	a	\bar{h}_1	\bar{h}_2	$10^3 \cdot \bar{W}_1$	$10^2 \cdot \bar{W}_2$	$10^2 \cdot \bar{W}_0$
0.02	1.	0.01	0.01635	0.19885	0.04358	0.03108	0.1522
0.02	2.	0.005	0.0182	0.1982	0.22244	0.06216	0.6475
0.02	3.	0.005	0.01855	0.1635	0.50745	0.09910	1.0331
0.02	5.	0.005	0.0192	0.09925	1.01120	0.28409	1.2953
0.02	10.	0.005	0.01995	0.02495	1.31564	1.23127	1.3171

Выводы: Как следует из табл. 1, наибольшее уменьшение прогибов по сравнению с панели постоянной толщины получается при $\xi = 1,0$ и составляет почти 3,5 раза.

Следует отметить, что при увеличении длины панели (параметра ξ), оптимальный проект приближается к случаю панели постоянной толщины.

Для сравнения результатов задача решена также методом прямого поиска, что показало совпадение результатов с точностью до сотых долей процента.

Список литературы / References

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448 с.
2. Belubekyan E.V., Poghosyan A.G., Khanikyan V.M. Optimization of acilindrical shell pieewise constant thickness, prepared from the composite material // Proceedings of the 4th international conference on contemporary problems in architecture and construction sustainable building industry of the future, September 24-27, 2012. Czestochowa. Poland, 2012. V. 2. P. 612-617.
3. Погосян А.Г. Применение метода деформируемого многогранника к решению задачи оптимального проектирования прямоугольной сжатой, усиленной по краям ребрами жесткости, при заданном значении первой частоты собственных колебаний // Изв. НАН Армении. Механика, 1998. Т. 51. № 3. С. 28-33.
4. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 266 с.