ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СОСТОЯНИЯ СЕТЕЙ СВЯЗИ С ДВУМЯ ТИПАМИ СООБЩЕНИЙ

Шамсиев Р.Н.[1], Куралов Б.А.[2] Email: Shamsiev658@scientifictext.ru

[1]*Шамсиев Рахим Нажмиддинович - кандидат физико-математических наук, доцент;*
[2]*Куралов Бекжон Абдуллаевич - преподаватель,*
кафедра высшей математики,
Ташкентский государственный технический университет,
г. Ташкент, Республика Узбекистан,

Аннотация: *в работе рассмотрены сети связи с двумя типами сообщений, в каждом узле имеется своя очередь. Сообщения I типа имеют приоритет перед сообщениями II типа, т.е. сообщения I типа передаются раньше сообщений II типа, независимо от времени поступления. В узел поступают пуассоновские потоки сообщений каждого типа с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно, длина которых экспоненциально-распределенные случайные величины, с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно. Составлены рекуррентные дифференциальные уравнения вероятностей состояния сети и для производящей функции этих вероятностей.*
Ключевые слова: *сети связи, вероятность, состояние, потоки сообщений.*

PROBABLE CHARACTERISTICS OF THE CONDITION OF COMMUNICATION NETWORKS WITH TWO TYPES OF COMMUNICATIONS

Shamsiev R.N.[1], Kuralov B.A.[2]

[1]*Shamsiev Rakhim Nazhmiddinovich - Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor;*
[2]*Kuralov Bekzhon Abdullaevich - Teacher,*
DEPARTMENT OF HIGHER MATHEMATICS,
TASHKENT STATE TECHNICAL UNIVERSITY,
TASHKENT, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: *the paper considers communication networks with two types of messages, each node has its own queue. Type I messages take precedence over type II messages, i.e. Type I messages are transmitted before Type II messages, regardless of the arrival time. The node receives Poisson message flows of each type with the parameters λ_1 and λ_2, respectively, whose length is exponentially distributed random variables, with the parameters μ_1 and μ_2, respectively. The recurrent differential equations, the probabilities of the network state and for the generating function of these probabilities are compiled.*
Keywords: *communication networks, probability, state, message flows.*

УДК: 621.394/395

В [1] было рассмотрены сети связи из двух узлов с одним типом сообщений в реальном времени. В данной работе исследуются сети связи с двумя типами сообщений, тоже в реальном времени.

В узел сети связи поступают сообщения двух типов. Сообщения I типа имеет приоритет перед сообщением II типа, т.е. сообщения I типа передаются раньше сообщений II типа, независимо от времени поступления. Однако передача любого сообщения завершается прежде, чем допускается следующее сообщение, т.е. прерывания передачи не происходит. В узле для каждого типа сообщений создаётся своя очередь.

В узел сети поступает Пуассоновский поток сообщений I типа с параметром λ_1, II типа с параметром λ_2. Длина сообщений экспоненциально распределенные случайные величины с параметрами μ_1, μ_2 соответственно.

Сеть начинает работать в момент $t = 0$ и предполагается, что в момент $t = 0$ в узле отсутствуют сообщения обоих типов. Через $P(t, n, m)$ обозначим вероятность того, что в момент t в очереди бункера ожидания для сообщений типа I имеется n сообщений, а в очереди бункера ожидания для сообщений типа II имеется m сообщений. Тогда по условию работы сети и по определению вероятности $P(t, n, m)$ имеем

$$P(0,0,0) = 1 \qquad (1)$$

$$P(0, n, m) = 0 \text{ при } n > 0, m > 0 \qquad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} P(t, n, m) = 1 \qquad (3)$$

Если $\Delta t -$ бесконечно малая величина, то

$$P(t + \Delta t, 0,0) = (1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\Delta t)P(t, 0,0) + P(t, 1,0)\mu_1\Delta t + P(t, 0,1)\mu_2\Delta t + 0(\Delta t)^2 \qquad (4)$$

Левая часть этого уравнения есть вероятность того, что в момент $t+\Delta t$ в узле отсутствуют сообщения обоих типов. Эту вероятность можно связать с состоянием узла в момент t. Согласно закону умножения и сложения вероятностей двух независимых событий, значение $P(t+\Delta t,0{,}0)$ равно вероятности отсутствия очередей для обоих типов сообщений в момент t, умноженной на вероятность того, что за время Δt не поступит ни одного сообщения из обоих типов; плюс вероятность нахождения в узле одного сообщение I типа в момент t, умноженная на вероятность того, что за время Δt это сообщение будет передано адресату; плюс вероятность нахождения в узле одного сообщение II типа в момент t, умноженная на вероятность того, что за время Δt это сообщение будет передано адресату; плюс вероятность остальных событий (например, за время Δt поступит два сообщения, …) которая стремится к нулю при $\Delta t\to 0$.

Перенеся $P(t,0{,}0)$ влево и устремив Δt к нулю, получим

$$\frac{dP(t,0,0)}{dt}=-(\lambda_1+\lambda_2)P(t,0{,}0)+P(t,1{,}0)\mu_1+P(t,0{,}1)\mu_2 \qquad (5)$$

Таким же образом получим

$$\frac{dP(t,n,0)}{dt}=-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)P(t,n,0)+P(t,n-1{,}0)\lambda_1+P(t,n+1{,}0)\mu_1 \qquad (6)$$

$$\frac{dP(t,0,m)}{dt}=-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)P(t,0,m)+P(t,0,m-1)\lambda_2+$$
$$+P(t,1,m)\mu_1+P(t,0,m+1)\mu_2 \qquad (7)$$

$$\frac{dP(t,n,m)}{dt}=-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)P(t,n,m)+P(t,n-1,m)\lambda_1+$$
$$+P(t,n,m-1)\lambda_2+P(t,n+1,m)\mu_1 \text{ , здесь } n,m\geq 1 \qquad (8)$$

Условия (1) и (2) являются начальными условиями для бесконечной системы рекуррентных дифференциальных уравнений (6), (7) и (8).

Для вероятностей $P(t,n,m)$ составляем производящую функцию следующим образом:

$$G(t,x,y)\equiv\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}P(t,i,j)x^iy^j \qquad (9)$$

В силу (3) ряд правой части этого равенство абсолютно сходится при $x=1,y=1$ и поэтому ряд является абсолютно сходящимся в круге $D=\{(x,y)\colon x^2+y^2\leq 1\}$ при любом t. Тогда функция $G(t,x,y)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема (любого порядка) и по x и по y, кроме того в силу (1) и (2) имеем:

$$G(0,x,y)=1 \qquad (10)$$

Вероятности $P(t,n,m)$ можно получить путем дифференцирования производящей функции:

$$P(t,n,m)=\frac{1}{n!\,m!}\frac{\partial^{n+m}G(t,x,y)}{\partial x^n\partial y^m}\bigg|_{x=0,y=0}$$

Теперь для производящей функции $G(t,x,y)$ составим дифференциальное уравнение, используя равенства (5)-(8). Для этого ряд (9) почленно дифференцируем по t:

$$\frac{\partial G(t,x,y)}{\partial t}=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{dP(t,i,j)}{dt}x^iy^j$$

В место производных $\frac{dP(t,i,j)}{dt}$ подставим правые части равенств (5)-(8):

$$\frac{\partial G(t,x,y)}{\partial t}=-(\lambda_1+\lambda_2)P(t,0{,}0)+\mu_1P(t,1{,}0)+\mu_2P(t,0{,}1)+$$
$$+\sum_{i=1}^{\infty}\big(-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)P(t,i,0)+\lambda_1P(t,i-1{,}0)+\mu_1P(t,i+1{,}0)\big)x^i+$$
$$+\sum_{j=1}^{\infty}\big(-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)P(t,0,j)+\lambda_2P(t,0,j-1)+$$
$$+\mu_1P(t,1,j)+\mu_2P(t,0,j+1)\big)y^j+$$
$$+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\big(-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)P(t,i,j)+\lambda_1P(t,i-1,j)+$$
$$+\lambda_2P(t,i,j-1)+\mu_1P(t,i+1,j)\big)x^iy^j \qquad (11)$$

Правую часть этого равенства прибавим к выражению, состоящему из 3 пар, каждая пара состоит из одного того же выражения, только с противоположными знаками, т.е. они сокращаются:

$$\left(\mu_1\left(1+\frac{1}{x}\right)+\mu_2\left(1+\frac{1}{y}\right)\right)P(t,0{,}0)-\left(\mu_1\left(1+\frac{1}{x}\right)+\mu_2\left(1+\frac{1}{y}\right)\right)P(t,0{,}0)+$$
$$+\mu_2\sum_{i=1}^{\infty}P(t,i,0)x^i-\mu_2\sum_{i=1}^{\infty}P(t,i,0)x^i+\mu_1\sum_{j=1}^{\infty}P(t,0,j)y^j-\mu_1\sum_{j=1}^{\infty}P(t,0,j)y^j$$

Затем после перегруппировки правой части этого равенства и в силу (9) получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial G(t,x,y)}{\partial t} = \left[(x-1)\lambda_1 + (y-1)\lambda_2 + \left(\frac{1}{x}-1\right)\mu_1 + \left(\frac{1}{y}-1\right)\mu_2\right] G(t,x,y) +$$
$$+\mu_2 G(t,x,0) + \mu_1 G(t,0,y) - (\mu_1/x + \mu_2/y) G(t,0,0) \qquad (12)$$

Таким образом доказали теорему:

Теорема. Производящая функция $G(t,x,y)$ составленная для вероятностей $P(t,n,m)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (12) с начальным условием (10).

Список литературы* / *References

1. *Шамсиев Р.Н.* Об одном методе нахождении вероятностных характеристик состояний сети связи // Проблемы современной науки и образования, 2018. № 13 (133). С. 7-10.