НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Селимханов Э.В. Email: Selimkhanov666@scientifictext.ru

Селимханов Эмирхан Валерьевич - магистр,
факультет математики и компьютерных наук,
Дагестанский государственный университет, г. Махачкала

Аннотация: *в статье даны точные оценки скорости сходимости (наилучших приближений) ряда Фурье по собственным векторам некоторого симметричного оператора в гильбертовом пространстве. Ранее, пользуясь некоторыми хорошо известными фактами, мы построили обобщенный модуль непрерывности произвольного вектора гильбертова пространства, который позволил нам дать точные оценки скорости сходимости (наилучших приближений) ряда Фурье по произвольной ортогональной системе векторов. В этой работе с помощью симметричного оператора в гильбертовом пространстве мы вводим аналоги классов дифференцируемых функций, характеризующихся обобщенным модулем непрерывности и на этих классах, устанавливаем точные оценки скорости сходимости (наилучших приближений) рядов Фурье по собственным векторам этого оператора. Кроме того, в работе даны точные оценки некоторых N – поперечников рассматриваемых классов векторов в гильбертовом пространстве.*

Ключевые слова: *гильбертово пространство, ряд Фурье, оператор сдвига, симметричный оператор, обобщенный модуль непрерывности, N – поперечник Колмогорова.*

SOME PROBLEMS OF APPROXIMATION THEORY IN HILBERT SPACE

Selimkhanov E.V.

Selimkhanov Emirkhan Valerievich - master student,
FACULTY OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE,
DAGESTAN STATE UNIVERSITY, MAKHACHKALA

Abstract: *the article provides accurate estimates of the rate of convergence (best approximations) of the Fourier series with respect to the eigenvectors of a certain symmetric operator in a Hilbert space. Earlier, using some well-known facts, we constructed a generalized modulus of continuity of an arbitrary vector of a Hilbert space, which allowed us to give exact estimates of the rate of convergence (best approximations) of a Fourier series in an arbitrary orthogonal system of vectors. In this paper, using a symmetric operator in a Hilbert space, we introduce analogues of classes of differentiable functions characterized by a generalized modulus of continuity and on these classes we establish exact estimates of the rate of convergence (best approximations) of the Fourier series with respect to the eigenvectors of this operator. In addition, in the paper, exact estimates are given for some N - widths of the considered classes of vectors in a Hilbert space.*

Keywords: *hilbert space, Fourier series, shift operator, symmetric operator, generalized modulus of continuity, N - Kolmogorov width.*

УДК 517.519

Пусть H – вещественное бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением (f, g) векторов $f, g \in H$ и нормой $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$; $A: H \to H$ – симметричный оператор в пространстве H, т.е. линейный оператор, заданный на некотором линейном многообразии $D(A) \subset H$, удовлетворяющий там условию $(Af, g) = (f, Ag)$ для любых $f, g \in D(A)$. Мы предполагаем, что оператор A обладает полной ортонормированной системой собственных векторов $\{g_n\}$, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_n\}$, т.е.

$$Ag_n = \lambda_n g_n \ (n = 0,1,2, \dots),$$

кроме того,

$$0 \le \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots.$$

Известно ([1], с. 390), что любой вектор $f \in H$ можно разложить в ряд Фурье

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)\, g_n, \qquad c_n(f) = (f, g_n) \tag{1}$$

по системе векторов $\{g_n\}$, сходящийся в пространстве H, т.е.

$$\|f - S_N(f)\| \to 0, \qquad N \to \infty,$$

где

$$S_N(f) = \sum_{0 \le n < N} c_n(f)\, g_n \tag{2}$$

- частичные суммы ряда (1).

Обозначим через

$$E_N(f) = inf\|f - P_N\| \ (N = 1,2,\dots)$$

наилучшее приближение вектора $f \in H$ полиномами

$$P_N = \sum_{0 \le n < N} a_n g_n.$$

Хорошо известно, что

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2(f), \tag{3}$$

$$E_N^2(f) = \|f - S_N(f)\|^2 = \sum_{n \ge N} c_n^2(f). \tag{4}$$

Напомним, что через

$$b_N(M), d_N(M), \delta_N(M), d^N(M), \pi_N(M)$$

общепринято соответственно обозначать бернштейновский, колмогоровский, линейный, гельфандовский и проекционный N – поперечник множества M в пространстве H (см., напр., [2], с. 204).

В пространстве H определим оператор (оператор сдвига)

$$F_h f = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(h) c_n(f)\, g_n,$$

где $\psi_n(h)$ $(n = 0,1,2,\dots; 0 \le h \le 1)$ – непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\psi_n(h) \not\equiv const, 0 \le \psi_n(h) \le 1, \psi_n(h) \ge \psi_{n+1}(h).$$

Нетрудно показать, что $F_h: H \to H$ – линейный ограниченный оператор, кроме того,

$$F_h g_n = \psi_n(h) g_n.$$

Пусть $f \in H$. Определим конечные разности первого и высших порядков вектора f, как и в классическом случае,

$$\Delta_h f = F_h f - f = (F_h - E)f,$$

$$\Delta_h^k f = \Delta_h\left(\Delta_h^{k-1} f\right) = (F_h - E)^k f =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} F_h^i f,$$

где $F_h^0 f = Ef = f, F_h^i f = F_h\left(F_h^{i-1} f\right), i = 1,2,\dots,k; k = 1,2,\dots)$ E – единичный оператор в H.

Величину

$$\Omega_k(f,\delta) = \sup_{0<h\le\delta} \left\|\Delta_h^k f\right\|$$

$$0 < h \le \delta$$

$$(k = 1,2,\dots; 0 < \delta < 1)$$

будем называть обобщённым модулем непрерывности k – го порядка вектора $f \in H$.

Рассмотрим теперь следующие классы векторов в пространстве H $- H^r(A) = \{f \in H: A^r f \in H\}$,

где $r = 0,1,2,\dots;$ $A^0 f = Ef = f, A^r f = A(A^{r-1} f), r = 1,2,\dots;$

$- W_\Phi^{r,k}(A) = \{f \in H^r(A): \Omega_k(A^r f, \delta) \le \Phi(\delta)\},$

где $r = 0,1,2,\dots;$ $k = 1,2,\dots;$ $\Phi(\delta)$ неотрицательная монотонно возрастающая функция на $(0,1)$;

$$- W^{r,k}(A) = \left\{ f \in H^r(A): \frac{1}{h}\int_0^h \Omega_k^{\frac{1}{k}}(A^r f, h)dh \le 1 \right\}$$

$\left(r = 0,1,2,\dots;\ k = 1,2,\dots; h \in (0,1)\right)$.

Справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in H^r(A)$. Тогда

$$E_N(f) \le \lambda_N^{-r}(1 - \psi_n(h))^{-k} \Omega_k(A^r f, h)$$

$$\left(N = 1,2,\dots; r = 0,1,2,\dots; k = 1,2,\dots; h \in (0,1)\right).$$

Здесь при каждом фиксированном N константу в правой части неравенства уменьшить нельзя.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in H^r(A)$. Тогда

$$E_N(f) \le \lambda_N^{-r}\left(1 - \frac{1}{h}\int_0^h \psi_n(h)dh\right)^{-k} \left(\frac{1}{h}\int_0^h \Omega_k^{\frac{1}{k}}(f,h)dh\right)^k$$

$$\left(N = 1,2,\dots; r = 0,1,2,\dots; k = 1,2,\dots; h \in (0,1)\right).$$

где, как и выше, при каждом фиксированном N константу в правой части неравенства уменьшить нельзя.

ТЕОРЕМА 3. Справедливы равенства

$$\gamma_N\left(W^r(A)\right) = \lambda_N^{-r}$$
$$(N = 1,2,\dots; r = 1,2,\dots),$$
$$\gamma_N\left(W_{\Phi}^{r,k}(A)\right) = \lambda_N^{-r}\left(1 - \Phi_N(h)\right)^{-k}\Phi(h)$$
$$\left(N = 1,2,\dots; r = 0,1,2,\dots; k = 1,2,\dots; h \in (0,1)\right),$$
$$\gamma_N\left(W^{r,k}(A)\right) = \lambda_N^{-r}\left(1 - \frac{1}{h}\int_0^h \psi_n(h)dh\right)^{-k}$$
$$\left(N = 1,2,\dots; r = 0,1,2,\dots; k = 1,2,\dots; h \in (0,1)\right),$$

где $\gamma_N(M)$ - любой из перечисленных выше поперечников множества $M \subset H$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Все теоремы, сформулированные выше с соответствующими изменениями, остаются справедливыми в комплексном гильбертовом пространстве.

2. Рассмотрим некоторые примеры гильбертовых пространств H и симметричных операторов $A: H \to H$, к которым применимы сформулированные выше теоремы (приводимые здесь обозначения являются общепринятыми (см., напр., [3], с.117, 170, 221; [5], с.355)):

1) $H = L_2\left(\mathbb{R}, e^{-x^2}\right), A = -e^{x^2}\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{d}{dx}\right),\ \lambda_n = 2n,$

$$g_n(x) = H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!\,2^n\sqrt{\pi}}}e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}, n = 0,1,2,\dots$$

- система полиномов Чебышева-Эрмита;

2) $H = L_2(\mathbb{R}_+, e^{-x}x^{\alpha}),\ \ A = -e^{x}x^{-\alpha}\frac{d}{dx}(e^{-x}x^{\alpha+1}),\ \lambda_n = n,$

$$g_n(x) = L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!\,\Gamma(\alpha+n+1)}}x^{-\alpha}e^{x}\frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+1}e^{-x}), n = 0,1,2,\dots$$

- система полиномов Чебышева-Лагерра;

3) $H = L_2([-1,1]), A = \frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d}{dx}\right),\ \lambda_n = n(n+1),$

$$g_n(x) = P_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, n = 0,1,2,\dots$$

- система многочленов Лежандра;

4) $H = L_2(2\pi), A = \frac{1}{i}\frac{d}{dx},\ \ \lambda_n = n,$

$$g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}, n = 0,\pm1,\pm2,\dots$$

- тригонометрическая система функций;

5) $H = L_2\left((0,1),x\right),\ A = -\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right) - \frac{p^2}{x},\ \lambda_n = \mu_n^2,$

$g_n(x) = J_p(\mu_n x)\ (p > -1), n = 0,1,2,\dots$

- система функций Беселля первого рода, а μ_n – положительные корни уравнения $J_p(x) = 0$, расположенные в порядке возрастания.

3. Из полученных здесь результатов следуют соответствующие ранее известные факты, например, если $H = L_2\left(\mathbb{R}, e^{-x^2}\right)$, то полагая $\psi_n(h) = (1-h^2)^{\frac{n}{2}}$ или $\psi_n(h) = e^{-nh}$, мы получим одномерные аналоги точных оценок наилучших приближений в пространстве $L_2\left(\mathbb{R}, e^{-x^2}\right)$, доказанные в [5], [6] (см. также [7]), если $H = L_2\left((0,1),x\right)$ или $H = L_2\left((a,b),p(x)\right)$ и $\psi_n(h) = (1-h)^n$, то мы получим соответствующие оценки, доказанные в [8], [9] (см. также [10]-[12]).

4. В последнее время в вопросах теории приближения широко применяется теория $\mathcal{K}$ – функционалов Петре [13]. Нетрудно показать, что из теоремы 1 следует равенство

$$\sup_{f\in H^r(A)} \lambda_N^r E_N(f)\left(\mathcal{K}(A^r f; \lambda_N^{-m})\right)^{-1} = 1,$$

где

$$\mathcal{K}(f, h^m) = \inf_{g\in H^{(m)}(A)} \{\|f-g\| + h^m\|A^r f\|\}$$
$$(m = 1,2,\dots; r = 1,2,\dots).$$

Список литературы / References

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1978. 543 с.
2. *Тихомиров В.М.* Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 14. М.: Наука, 1987. 271с.
3. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. – 416с.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. – 527с.
5. *Abilov V.A., Abilov M.V.* Certain problems of the approximation of functions in two variables by Fourier-Hermite sums in the space $L_2\left(\mathbb{R}^2; e^{-x^2-y^2}\right)$ //Analysis Mathematica, 32(2006), p. 163-171.
6. *Abilov V.A., Abilova F.V., Abilov M.V.* Some problems of the approximation of functions by «hyperbolic» Fourier-Hermite sums in the space $L_2\left(\mathbb{R}^2; e^{-x^2-y^2}\right)$ // Analysis Mathematica, 39(2013), p. 247-257.
7. *Абилов В.А., Абилова Ф.В.* Некоторые вопросы приближения функций суммами Фурье-Эрмита в пространстве $L_2\left(\mathbb{R}, e^{-x^2}\right)$ //Изв. вузов. Математика.2006, 1. С.3-12.
8. *Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К.* Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье-Беселля // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015. Т.55. №6. С.917-927.
9. *Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К.* Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам в пространстве $L_2\left((a,b)p(x)\right)$ // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2009. Т.49. №6. С.966-980.
10. *Селимханов Э.В.* Точные оценки скорости сходимости ряда Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля //Вестник науки и образования. 2018, №3 (39), С. 6-14.
11. *Селимханов Э.В.* Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по произвольным ортогональным системам //Проблемы современной науки и образования. 2018, №4 (124), С. 17-29.
12. *Селимханов Э.В., Абилова Ф.В.* Точные оценки скорости сходимости ряда Фурье в гильбертовом пространстве //Вестник науки и образования. 2019, №9 (63), С. 3-5.
13. *Peetre J.* On the connection between the theory of interpolation space and approximation theory. In: Proc. Intern. Conf. Constructive Function Theory. Varna, 1970, pp. 351-363. Sofia: Bulg. Acad. Sci. 1972.