НОВОЕ В ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИЙ КРУЧЕНИЯ

Алдабергенов А.К. Email: Aldabergenov640@scientifictext.ru

Алдабергенов Абай Капанович – кандидат технических наук, профессор,
кафедра энергетики и машиностроения,
Костанайский инженерно–экономический университет, г. Костанай, Республика Казахстан

Аннотация: *в работе интегрированием дифференциального уравнения получено универсальное уравнение деформаций кручения. Научная новизна здесь заключается в том, что никаких дополнительных условий и ограничений при этом не вводится. Это уравнение внешне полностью совпадает с уравнением метода начальных параметров при изгибе, а также классическим решением Варвака. В работе приводятся принципиальные различия этих методов. Полученное уравнение может быть использовано для расчета валов, состоящих из любого количества участков.*

Ключевые слова: *вал, кручение, деформация, момент, уравнение, константа.*

NEW IN THE THERY OF TORSIONAL DEFORMATIONS

Aldabergenov A.K.

Aldabergenov Abay Kapanovich - Candidate of Technical Sciences, Professor,
DEPARTMENT OF ENERGY AND MECHANICAL ENGINEERING,
KOSTANAY ENGINEERING ECONOMIC UNIVERSITY, KOSTANAY, REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

Abstract: *in this paper, the universal equation of torsion deformation is obtained by integrating the differential equation. The scientific novelty here is that no additional conditions and restrictions are introduced. This equation externally completely coincides with the equation of the method of initial parameters for bending, and also the classical solution of Varvak. In the work they give the principal differences of these methods. The resulting equation can be used to calculate shafts consisting of any number of sections.*

Keywords: *shaft, torsion, deformation, moment, equation, constant.*

УДК 539.385

Для определения деформации кручения вала ($GI_\rho = const$.) используется известное дифференциальное уравнение [1, с. 162]:

$$GI_\rho \frac{d\varphi_x}{dx} = M_x. \qquad (1)$$

Рассмотрим вал, показанный на рис. 1. Начало координат расположим на левом конце балки. На этом примере покажем, что число постоянных интегрирования можно свести к двум.

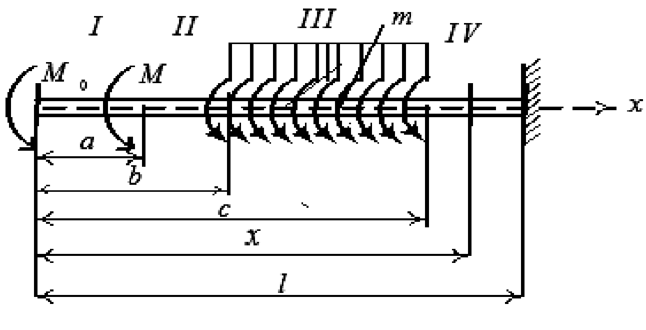

Рис. 1. Кручение вала

Запишем выражения крутящих моментов на участках вала:

$$M_1 = M_0; \quad M_2 = M_0 + M; \quad M_3 = M_0 + M + m(x-b);$$
$$M_4 = M_0 + M + m(c-b). \qquad (2)$$

С учетом (2) проинтегрируем уравнение (1) и получим:

$$GI_\rho \varphi_1 = M_0 x + C_1; \quad GI_\rho \varphi_2 = M_0 x + Mx + C_2;$$

$$GI_\rho\varphi_3 = M_0x + Mx + m\frac{(x-b)^2}{2} + C_3;\ GI_\rho\varphi_4 = M_0x + Mx + m(c-b)x + C_4. \qquad (3)$$

Произвольные постоянные C_i определяются из условий:

на концах стержня:

а) при $x=0$ $\varphi_1=\varphi_0$, б) при $x=l$ $\varphi_4=0$;

в местах гладкого и непрерывного сопряжения участков:

в) при $x=a$ $\varphi_1=\varphi_2$;

г) при $x=b$ $\varphi_2=\varphi_3$;

д) при $x=c$ $\varphi_3=\varphi_4$. (4)

Принимая во внимание (3), из условий (4) находим:

$$C_1 = GI_\rho\varphi_0;\ C_3 = C_2 = GI_\rho\varphi_0 - Ma;\ C_4 = GI_\rho\varphi_0 - Ma - m\frac{c^2-b^2}{2}. \qquad (5)$$

Как видим, между постоянными интегрирования отдельных участков имеются строгие зависимости. Во – первых, константа каждого участка выражается через константу интегрирования первого участка. А это приводит к уменьшению числа постоянных. Во–вторых, в последнем равенстве (5) полностью сохранены формулы для определения константов предыдущих участков. Отсюда можно сделать очень важный вывод: постоянное данного участка находится из формулы последнего участка путем исключения правых от него сил. Поэтому равенство последнего участка можно назвать универсальной формулой. Тогда для общего случая кручения вала формулу для нахождения постоянных интегрирования участков можно представить так:

$$C_n = GI_\rho\varphi_0 - M_ia_i - m_i\frac{c_i^2-b_i^2}{2}, \qquad (6)$$

где, $n-$номер участка; $i-$ номер нагрузки; a_i – расстояние от начала координат до сосредоточенного момента M_i; c_i и b_i – расстояния от начала координат до начала и конца распределенной нагрузки m_i. Для данного участка с распределенной нагрузкой надо положить $c_i=b_i$.

Заметим, что в практических расчетах нет необходимости в определении констант каждого участка вала. Все они выражены через константы первого участка. В конечном счете, в уравнениях деформаций остается лишь одна константа $GI_\rho\varphi_0$.

С учетом постоянных (5) уравнения углов закручивания вала (3) примут вид:

$$GI_\rho\varphi_1 = GI_\rho\varphi_0 + M_0x;\ GI_\rho\varphi_2 = GI_\rho\varphi_0 + M_0x + M(x-a);$$

$$GI_\rho\varphi_3 = GI_\rho\varphi_0 + M_0x + M(x-a) + \frac{m(x-b)^2}{2};$$

$$GI_\rho\varphi_4 = GI_\rho\varphi_0 + M_0x + M(x-a) + \frac{m(c-b)^2}{2} + m(c-b)(x-c). \qquad (7)$$

После несложных преобразований последнее уравнение системы (7) можно представить так:

$$GI_\rho\varphi_4 = GI_\rho\varphi_0 + M_0x + M(x-a) + m\left[\frac{(x-b)^2}{2} - \frac{(x-c)^2}{2}\right]. \qquad (8)$$

Примечание. Преобразование:

$$m\frac{(c-b)^2}{2} + m(c-b)(x-c) = \frac{mc^2}{2} - m\cdot c\cdot b + \frac{mb^2}{2} + m(c-b)(x-c) =$$

$$= m(c-b)x - \frac{mc^2}{2} + \frac{mb^2}{2} + \frac{x^{2^2}}{2} - \frac{x^2}{2} = m\left[\frac{(x-b)^2}{2} - \frac{(x-c)^2}{2}\right].$$

Систему уравнений (7) и (8) можно обобщить и для общего случая кручения вала записать в следующем виде:

$$GI_{\rho}\varphi_n = GI_{\rho}\varphi_0 + M_0 x + M_i(x-a_i) + m_i[\frac{(x-b_i)^2}{2} - \frac{(x-c_i)^2}{2}]. \qquad (9)$$

Здесь *a*, b и *c (индексы опущены)* – расстояния от начала координат до сосредаточенного момента, а также начала и конца распределенного момента. В (9) неизвестными являются угол закручивания φ_0 и момент M_0.

Нетрудно заметить, что в уравнении последнего участка (9) полностью сохранены уравнения деформаций предыдущих участков. Это означает, что из него можно получить уравнения для других участков. Поэтому его назовем универсальным уравнением деформации кручения. Им можно пользоваться в общем случае кручения вала с любым числом участков. Надо иметь в виду, что при определении деформаций конкретного сечения в уравнении (9) учитываются только те нагрузки, которые расположены левее от него. При этом нет необходимости разделения вала на участки. Далее, каждый вид нагрузки в этих уравнениях представляется слагаемым определенного типа. Наконец, знаки перед слагаемыми выбираются по знаку крутящего момента от данной нагрузки в данном сечении. Насколько известно автору, приведенная здесь методика определения деформации кручения ранее нигде не встречалалась. Аналогичная методика определения деформаций изгиба приведена в [3, с. 43] и [4, с. 29]. Внешне уравнение (9) совпадает с известными унивесальными уравнениями метода начальных параметров. Но имеет принципиальную разницу, которая заключена в получении этих уравнений. В данной работе произведено обыкновенное интегрирование дифференциального уравнения (1). В отличие от метода начальных параметров здесь каких–либо дополнительных условий и ограничений не вводятся. В этом заключается ее научная новизна. Традиционно метод начальных параметров часто используется в задачах изгиба, и крайне редко в задачах кручения.

Наконец, из равенства б) условия (5) определим постоянное интегрирования первого участка:

$$GI_{\rho}\varphi_0 = Ma - m\frac{(c-b)^2}{2} + m(c-b)c \; - M_0 l - Ml - m(c-b)l =$$

$$- m\frac{(c-b)^2}{2} - m(c-b)(l-c) = -M_0 l - M(l-a) - m\frac{(l-b)^2}{2} + m\frac{(l-c)^2}{2}. \qquad (10)$$

В (10) каждое слагаемое представляет собой угол закручивания начального сечения относительно защемления от отдельных видов нагрузки. Например, слагаемые $m\frac{(c-b)^2}{2} + m(c-b)(l-c)$ определяют угол закручивания этого сечения стержня от равномерно распределенной нагрузки. При этом первый член соответствует деформации части вала под нагрузкой, а второй – части вала за ней.

По определению Варвака П.М. [2, с. 3]: определение силовых и деформационных факторов интегрированием соответствующего дифференциального уравнения называется классическим методом. Следуя этому определению, данный метод определения деформаций кручения можно отнести к классическому методу.

Таким образом, проводя непосредственное интегрирование дифференциального уравнения (1), без ввода каких–либо дополнительных условий и ограничений получено универсальное уравнение деформации кручения (9). Оно также совпадает с уравнением [2, с. 47]. Разница заключается в следующем. В [2] сначала находятся выражения деформаций вала от отдельных видов простых нагрузок. Затем, слагаемые общего уравнения записываются по аналогии этих выражений. При этом распределенные нагрузки представляются как суммы элементарных сосредоточенных сил. Этот метод также назван методом начальных параметров. По сути, совершенно отличающийся от того метода, который традиционно излагается при изучении раздела: «Деформация при изгибе». В данной работе в отличие от [2] используя только неопределенные интегралы, производится интегрирование дифференциального уравнения, а неизвестные постоянные определяются из граничных условий.

Список литературы / References

1 *Алдабергенов А.К.* Сопротивлекние материалов с основами теории упругости. Алматы: Рауан, 1994.

2 *Варвак П.М.* Новые методы решения задач сопротивления материалов. Киев: Вища школа, 1977. С. 160.

3 *Алдабергенов А.К.* Новое в методе непосредственного интегрирования. // Проблемы современной науки и образования. № 5 (47). М., 2016.
4 *Алдабергенов А.К.* О методе непосредственного интегрирования // Вестник науки и образования, 2016. № 8 (20). 29–32.