УРАВНЕНИЕ ПИФАГОРА И ЗАГАДКА ФЕРМА

Баталов А.П. Email: Batalov638@scientifictext.ru

Баталов Андрей Петрович - кандидат технических наук, доцент,
кафедра машиностроения,
Санкт-Петербургский горный университет, г. Санкт-Петербург

Аннотация: *предложено общее доказательство уравнения Пифагора и теоремы Ферма. Для этого члены уравнений формируются в соответствии с традицией – два нечетных взаимно простых числа (Z, Y) в степени n, разность этих выражений должно дать четное число X в степени n. Принимаем X=kx, что допустимо, т.к. разность Z^n - Y^n всегда имеет хотя бы один делитель, например, Z – Y при любых n. Поиск решения этих уравнений при целочисленных величинах Z, Y, X и n≥3 проводится, если представить Z=a+x, Y=a-x; или Z=z , Y=z-x; X=kx – всегда. Величины z, a, x, k – попарно простые числа. Доказательство весьма краткое и применяется только принцип делимости и соотношение четности.*

Ключевые слова: *уравнение Пифагора, теорема Ферма, общее доказательство.*

PYTHAGORAS EQUATION AND THE RIDDLE OF FERMAT

Batalov A.P.

Batalov Andrej Petrovich – PhD, Associate Proffesor,
THE DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING,
STATE MINING UNIVERSITY, ST.-PETERSBURG

Abstract: *the general proof of the Pythagorean equation and Fermat's theorem. For this purpose, equations members are formed in accordance with the tradition - two odd coprime numbers (Z, Y) to the power n, the difference between these expressions should give even number X to the power of n. Take X = kx, it is permissible, because difference Z^n - Y^n always has at least one divider, e.g., Z - Y for any n. Search for solutions to these equations with integer values of Z, Y, X and n≥3 held if present Z = a + x, Y = a-x; or Z = z, Y = z-x; X = kx-always. Values of z, a, x, k - pairwise prime numbers. The proof is very short and only the principle of divisibility and the parity ratio.*

Keywords: *the equation Pythagoras, Fermat's theorem, general proof.*

УДК 5.510.2

Известна «формула индусов» или уравнение Пифагора $z^2 - y^2 = x^2$ [1, с. 457], есть несколько вариантов решения этого уравнения в целых числах. Хочу представить свой вариант решения, который позволяет несколько расширить рамки его применения для высших степеней [1, с. 607].

Пусть **z = a + x, y = a – x,** где $\mathbf{z > y}$; $\mathbf{a > x}$, **a** и **x** – взаимно простые числа; **z, y, a, x** –целые числа; **z, y , a** –нечетные, **x** – четное число. [2,с.19].

$$\mathbf{z^2 - y^2 = x^2 = (a + x)^2 - (a - x)^2 = 4ax = x^2, \quad 4a = x} \qquad (1)$$

Это несколько странный результат, но он дает нам почти классический ответ:

Если **x=4, a=1, z=5, y=-3.**

Нас не устраивает, что **x** больше **a** . Сделаем так:

$$\mathbf{z^2 - y^2 = k^2x^2 = (a + x)^2 - (a - x)^2 = 4ax, \quad 4a = k^2x}; \qquad (2)$$

Выбираем **k** *(рациональное число)* и **x** такими, чтобы обеспечить **a** нечетным целым числом, хотя есть и вариант:

пусть $\mathbf{k = 4}$, $\mathbf{a = 4}$, $\mathbf{x = 1}$, то $\mathbf{z = 5}$, $\mathbf{y = 3}$, $\mathbf{kx = 4}$.

Выбирая различные значения **k**, как целые, так и дробные, мы можем получить все возможные Пифагоровы тройки целых чисел **z, y, kx**, при соблюдении равенства $\mathbf{4a = k^2x}$. Одно из этих чисел обязательно будет иметь делитель **3**.

Пусть $\boldsymbol{k = 3}$, $\boldsymbol{a = 9}, \boldsymbol{x = 4}$, то $\mathbf{z = 13}$, $\mathbf{y = 5}$, $\mathbf{kx = 12}$

Примем $\mathbf{k} = 2$, тогда $\mathbf{a = x}$, $\mathbf{y = 0}$, $\mathbf{z = x}$.

Пусть $\boldsymbol{k = 13/6}$, $\boldsymbol{x = 144}$, $\boldsymbol{a = 169}$, то $\mathbf{z = 313}$, $\mathbf{y = 25}$, $\mathbf{kx = 312}$.

Используем такой подход для разности кубов, но $\mathbf{k} \geq 2$ принимаем только целые:

$$\mathbf{z^3 - y^3 = (a + x)^3 - (a - x)^3 = (kx)^3}$$

$$\text{Или} \quad \mathbf{6a^2 + 2x^2 = k^3x^2 \; ; \; 3a^2 + x^2 = k^3x^2/2,} \qquad (3)$$

что противоречит условию решения в целых числах, левая часть равенства – нечетное число, а правая – четное при любых значениях «**k**» и «**x**», т.к. $\mathbf{x = 2^n x_1}$. Также появляется требование делимости «**a**» на «$\mathbf{x_1}$».

То же получим для уравнений пятой и седьмой степени и других нечетных степеней:

$$\boldsymbol{z^5 - y^5 = (a + x)^5 - (a - x)^5 = (kx)^5}$$

$$\text{или} \quad \boldsymbol{5a^5 + 10a^2x^2 + x^4 = k^5x^5 / 2}. \qquad (4)$$

$$\mathbf{z^7 - y^7 = (a + x)^7 - (a - x)^7 = (kx)^7} \text{ или}$$

$$\mathbf{7a^6 + 35a^4x^2 + 21a^2x^4 + x^6 = k^7x^6/2}. \qquad (5)$$

Также $\mathbf{z^4 - y^4 = 8ax(a^2+x^2) = \boldsymbol{k^4x^4}}$ или $\mathbf{8a(a^2+x^2) = k^4x^3}$,

$$\mathbf{a(a^2+x^2) = k^4x_1^3}; \qquad (6)$$

т.е. опять появляется требование делимости "**a**" на "$\mathbf{x_1}$". Итак, уравнение $\mathbf{z^n - y^n = (kx)^n}$ при $\mathbf{n} \geq 3$ также не может быть решено в целых числах.

Оказывается, что похожий путь доказательств можно провести, если принять **z**, $\mathbf{y = z - x}$, при прежних условиях: **z, y** – нечетные, **x**- четное.

$$\mathbf{z^2 - y^2 = z^2 - (z - x)^2 = 2zx - x^2 = k^2 x^2}, \quad \mathbf{2z = k^2 x + x}. \qquad (7)$$

Если $\mathbf{x = 2x_1}$, $\mathbf{x_1}$ –нечетное, **k** – четное, $\mathbf{z = (k^2 + 1)x_1}$. (8)

Пусть $\mathbf{x_1=3, x=6, k=2}$, тогда $\mathbf{z = 15, y = 9, kx = 12}$.

Примем $\mathbf{x_1=5, x=10, k=4}$, тогда $\mathbf{z = 85, y = 75, kx = 40}$.

Для более высоких степеней **z, y** – нечетные, **x**- четное, **k**-натуральное число.

$$\text{Если } \mathbf{z^3 - y^3 = z^3 - (z - x)^3 = (kx)^3} \text{ или } \mathbf{3z^2 - 3zx + x^2 = k^3x^2}. \qquad (9)$$

$$\text{При } \mathbf{z^4 - y^4 = z^4 - (z - x)^4 = k^4x^4} \text{ или } \mathbf{4z^3 - 6z^2x + 4zx^2 - x^3 = k^4x^3}. \qquad (10)$$

В уравнениях (9, 10) также требуется делимость **z** и $\mathbf{x_1}$, что противоречит условию взаимной простоты, к тому же еще левая часть уравнения - нечетное число, а правая - четное. Такие же результаты получаются для всех высших степеней

Следовательно, уравнение $\mathbf{z^n - y^n = (kx)^n}$ при $\mathbf{n} \geq 3$ также не может быть решено в целых числах, каждое из которых отлично от нуля.

Можно попробовать этот подход для исследования гипотезы А. Била [3 с. 1436-1437], где фигурируют A,B,C, x,y,z - положительные целые числа; x, y, z >2. A, B, C – взаимно простые числа, что требует, чтобы два числа были нечетными, одно - четное.

«Если $A^x+B^y=C^z$, то A, B, C имеют общий делитель». Мне кажется это парадоксальным предположением, противоречащим взаимной простоте A, B, C; но посмотрим, что получится, если опять использовать примитивный подход.

Пусть x≤ y≤ z [3, с. 1436] и $C^z - B^y = A^x$. Обозначим C=c, A=a, B=c-a; полагаем, что c> a; c, a- взаимно простые числа. Сделаем соответствующие подстановки:

$$c^z - (c-a)^y = a^x \text{ или } c^z - c^y + yc^{y-1}a - \frac{y(y-1)}{1\cdot 2}c^{y-2}a^2 + \ldots yca^{y-1} - a^y = a^x. \qquad (11)$$

$$c^y(c^{z-y}-1) + yc^{y-1}a - \frac{y(y-1)}{1\cdot 2}c^{y-2}a^2 + \ldots yca^{y-1} = a^y + a^x = a^x(a^{y-x}+1) \qquad (12)$$

Возможно, что $c^{z-y} \equiv 1 (mod\ a)$, $(c^{z-y}-1)$ – четное число, обозначим $c^{z-y}-1=Ka$, тогда равенство (12) можно сократить на «a»:

$$c^yK + yc^{y-1} - \frac{y(y-1)}{1\cdot 2}c^{y-2}a + \ldots yca^{y-2} = a^{x-1}(a^{y-x}+1), \qquad (13)$$

В (13) появляется возможность обосновать делимость a/c или c/a, но также есть еще $(a^{y-x}+1)$ – нечетно, то возможно оно имеет делитель 'c', обозначим

$a^{y-x}+1=Mc$ и сократим обе части равенства (13) на общий делитель 'c':

$$c^{y-1}K + yc^{y-2} - \frac{y(y-1)}{1\cdot 2}c^{y-3}a + \ldots ya^{y-2} = a^{x-1}M, \qquad (14)$$

$$c^{y-2}(cK+y) - \frac{y(y-1)}{1\cdot 2}c^{y-3}a + \ldots ya^{y-2} = a^{x-1}M, \qquad (15)$$

Через какое-то количество шагов таких сокращений мы получим странное равенство, которое нам никак не покажет возможный общий делитель для A,B,C:

$$T + ya^{y-n} = M, \qquad (16)$$

Этот путь исследования гипотезы Била – тупиковый, возможно, что неопределенность значений x, y, z усложняет подобный анализ.

«Диафантовы тройки» чисел, приведенные в статье [3, с. 1437] практически все включают одно число с показателем 2, что запрещено гипотезой Била, например: $2^5+7^2=3^4$; $7^3+13^2=2^9$; $2^7+17^3=71^2$; $3^5+11^4=122^2$; …$33^8+1549034^2=15613^3$.

Приведенные примеры также не имеют общих делителей.

Список литературы / References

1. Математический энциклопедический словарь. Гл. редактор Ю.В. Прохоров. Изд. «Советская энциклопедия». М., 1988.
2. *Рибенбойм П.* Последняя теорема Ферма для любителей. М. «Мир», 2003.
3. *Mauldin R. Daniel.* A Generalization of Fermat’s Last Theorem: The Beal Conjecture and Prize Problem.. Notices of the AMS. V. 44. Number 11.