РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПОМОЩЬЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Рахимов Н.Н.[1], Тагирова З.Г.[2], Хакназарова Х.К.[3] Email: Rahimov631@scientifictext.ru

[1]Рахимов Насриддин Номозович - преподаватель, заведующий кафедрой, кафедра математики и информатики;
[2]Тагирова Зухра Гулямовна – ассистент, преподаватель;
[3]Хакназарова Хуршида Кенджаевна - магистрант, учитель, Академический лицей № 2
Самаркандский государственный университет,
г. Самарканд, Республика Узбекистан

Аннотация: *в статье указаны с помощью геометрическихе методов решения некоторых алгебраических задач по темам уравнение и неравенство. В каждом этюде приведены геометрические приемы решения задач. Они, как правило, не обладают для учащихся признаком привычности, но, как показывает опыт, легко ими воспринимаются. Благодаря интеграции «негеометрического» условия задачи и ее геометрического решения математические знания предстают перед учащимися как живая, динамичная система, способная решать задачи из других наук и практики.*
Ключевые слова: *теорема, треугольник, площадь, вектор, уравнение, неравенство и система уравнение.*

THE DECISION SOME ALGEBRAIC EQUATION AND INEQUALITIES WITH GEOMETRICAL METHODS

Rahimov N.N.[1], Tagirova Z.G.[2], Haknazarova H.K.[3]

[1]Rahimov Nasriddin Nomozovich - Lecturer, Head of Department, DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE;
[2]Tagirova Zuhra Gulyamovna - Assistant, Lecturer;
[3]Haknazarova Hurshida Kenjayevna - Graduate Student, Teacher, ACADEMIC LYCEUM № 2
SAMARKAND STATE UNIVERSITY,
SAMARKAND, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: *the geometrical methods of the decision some algebraic tasks on themes the equation and inequality are specified with the help in clause. In each etude the geometrical receptions of the decision of tasks are given. They, as a rule, have no for the pupil an attribute habitual, but, as shows experience, it is easy by them are perceived. Due to integration of a "not geometrical" condition of a task and its (her) geometrical decision the mathematical knowledge appears at the pupils as alive, dynamical system capable to decide(solve) of a task from other sciences and practice.*
Keywords: *the theorem, triangle, area, vector, equation, inequality and system the equation.*

УДК: 514

Мы в этой статье хотим показать решение сложных уравнений и неравенств геометрическими методами, что лучше, чем решение алгебраическими методами.

Все задачи разделим на 3 части:

1) Решить задачи с помощью площади фигуры;
2) Решить задачи с помощью теоремы косинусов и теоремы Пифагора;
3) Решить задачи с помощью векторов.

Решая задачи этим методом, ученики ещё более заинтересовались на уроке математики.

Решение задачи с помощью площади фигуры

1-задача. Доказать неравенство $x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$, где $x,y,z\in(0;1)$.

Решение. Построим правильный треугольник ABC со стороны 1см. Стороны треугольника AB, BC, AC соответственно возьмем точки M, N, K, для него *AM=x*, *BK=z*, *CN=y* (Рис. 1). Площади треугольнике AMN, CNK, BMK соответственно так S_1, S_2, S_3, тогда будет $S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}x(1-y)$; $S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}y(1-z)$; $S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}z(1-x)$; Известно, что $S_1+S_2+S_3<S_{ABC}$ и $S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

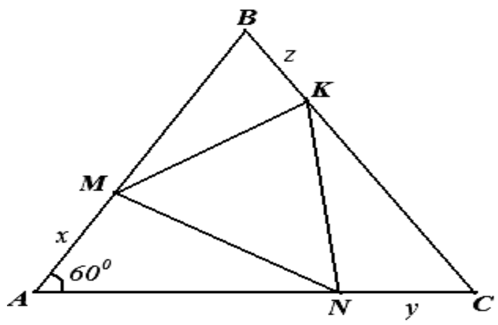

Рис. 1. Треугольник соответствует условию задачи

Поэтому $\frac{\sqrt{3}}{4}x(1-y)+\frac{\sqrt{3}}{4}y(1-z)+\frac{\sqrt{3}}{4}z(1-x)<\frac{\sqrt{3}}{4}$,

$\frac{\sqrt{3}}{4}(x(1-y)+y(1-z)+z(1-x))<\frac{\sqrt{3}}{4}$, $x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$

Доказать неравенство, [3].

Решение задачи с помощью теоремы косинусов и теоремы Пифагора

2-задача. Решить уравнение: $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

Решение. Придадим каждому из двух радикалов в уравнение определённый геометрический смысл. Действительно, рассмотрим прямоугольный треугольник OAM со сторонами OA=1, OM=x и углом $\angle AOM=90^0$ между ними. Тогда геометрический смысл первого из радикалов $\sqrt{1+x^2}$ - есть длина гипотенузы AM.

Рассмотрим теперь треугольник OBM со сторонами OB=1, OM=x и $\angle BOM=30^0$ между ними. Тогда геометрический смысл второго корня $\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}=\sqrt{1^2+x^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x}$, согласно теореме косинусов, есть длина третьей стороны BM этого треугольника.

Изобразим оба треугольника с общий стороной OM на одном рисунке и соединим отрезком точки A и B. Согласно неравенству треугольника, имеем: $AM+BM\geq AB$, причём $AM+BM=AB$ тогда и только тогда, когда точка M лежит между точками A и B, совпадая с C (Рис. 2).

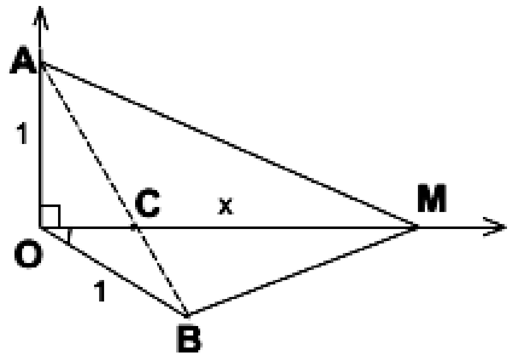

Рис. 2. Треугольник по условию задачи

Введём систему координат, поместив начало координат в точку O и направив ось абсцисс вдоль стороны OA. Тогда в выбранной системе координат A(0;1), $B(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2})$, и длина отрезка AB равна $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2}=\sqrt{3}$. Так как в правой части уравнение стоит как раз $\sqrt{3}$, то решить уравнение означает найти абсциссу точки C(x;0), в которой прямая AB пересекает ось абсцисс.

Уравнение прямой AB имеет вид $y=-\sqrt{3}x+1$. Составляя уравнение $-\sqrt{3}x+1=0$, находим искомое и единственной решение $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, [2].

Решить задачи с помощью векторов

3-задача. Положительные числа a, b, c таковы, что abc=1. Докажите неравенство $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$.

Решение. Удобно перейти к новым переменным x=1/a, y=1/b, z=1/c, также положительным и связанным условием xyz=1. Данное неравенство эквивалентно следующему: $S=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{3}{2}$. Применяя неравенство Коши–Буняковского к векторам $\vec{m}\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}},\frac{y}{\sqrt{z+x}},\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)$ и $\vec{n}\left(\sqrt{y+z},\sqrt{z+x},\sqrt{x+y}\right)$ получаем $(x+y+z)^2\leq 2S(x+y+z)$, т.е. $S\geq(x+y+z)/2$. Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим трёх положительных чисел, получаем: $S\geq\frac{3}{2}\cdot\frac{x+y+z}{3}\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}$; [1].

4-задача. Решить уравнение: $x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{1+x^2}$.

Решение. Воспользуемся неравенством $a_1a_2+b_1b_2\leq\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}$.

Имеем $x\sqrt{1+x}+1\cdot\sqrt{3-x}\leq\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{(1+x)+(3-x)}=2\sqrt{1+x^2}$. Значить, векторы (x;1) и ($\sqrt{1+x},\sqrt{3-x}$) коллинеарные, т.е.

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{\sqrt{3-x}},\ x\sqrt{3-x}=\sqrt{x+1},\ x^3-3x^2+x+1=0,\ (x-1)(x^2-2x-1)=0.$$

$$x_1=1,\quad x_2=1+\sqrt{2},\quad x_3=1-\sqrt{2}.$$

Последний корень посторонний. Ответ: 1, $1+\sqrt{2}$., [1].

Список литературы / References

1. *Галкин Е.В.* Нестандартные задачи по математике. Алгебра: Учеб. пособие для учащихся 7-11 кл. Челябинск: «Взгляд», 2004. 448 с.
2. *Исраилов И., Пашаев З.* Геометрия 1 часть. Учебник академического лицея. Ташкент. Издательство «Учитель», 2004 г.
3. *Яковлев Г.Н., Купцов Л.П. и др.* Всероссийские математические олимпиады школьников. Москва. Издательство «Просвещение», 1992 г.