ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА

Еникеев И.Х. Email: Enikeev 627@scientifictext.ru

Еникеев Ильдар Хасанович - доктор технических наук, профессор,
кафедра математического образования,
Московский политехнический университет, г. Москва

Аннотация: *в статье приведено доказательство фундаментальной теоремы Ферма при некоторых упрощающих предположениях. Основные допущения основаны на предположении о существовании функциональной зависимости между целочисленными переменными, входящими в условие теоремы. Это допущение позволяет получить систему линейных дифференциальных уравнений относительно неизвестных величин. Полученная в ходе интегрирования этой системы, система алгебраических уравнений была исследована и решена при помощи построения соответствующих плоских числовых множеств. Для доказательства используются свойства целочисленных функций, а также методы линейного программирования. Рассмотрены числовые примеры, иллюстрирующие данный подход.*

Ключевые слова: *теорема Ферма, натуральные числа, целочисленные переменные, первая и вторая производная, методы линейного программирования.*

ABOUT ONE PARTICULAR CASE OF FERMAT'S THEOREM

Enikeev I.H.

Enikeev Ildar Hasanovic – Doctor of technical Sciences, Professor,
DEPARTMENT OF MATHEMATICAL EDUCATION,
MOSCOW POLYTECHNIC UNIVERSITY, MOSCOW

Abstract: *the article shows the proof of fundamental Fermat's theorem under certain simplifying assumptions. Key assumptions are based on the assumption of the existence of functional dependencies between integer variables that are included in the statement of the theorem. This assumption allows to obtain a system of linear differential equations for unknown variables. Obtained in the course of integrating this system, the system of algebraic equations was studied and solved by constructing appropriate flat numerical sets. To prove this we use the properties of integer functions, and linear programming methods. We consider numerical examples to illustrate this approach.*

Keywords: *Fermat's theorem, integer variables, first and second derivatives, linear programming methods.*

УДК 511.2:517.2:519.852

Теорема Ферма:

Если натуральное число n>2, то уравнение:

$$x^n + y^n = z^n \qquad (1)$$

для любых натуральных чисел x, y, z не имеет решения [1].

Приведем доказательство этой теоремы при следующих упрощающих предположениях:

Будем считать, что в (1) переменные y, z зависят от x, то есть:

$$y=y(x),\ z=z(x) \qquad (2)$$

В (2) функции y(x) и z(x) являются целочисленными функциями целочисленного аргумента, то есть эти функции при целом значении аргумента принимают только целые значения.

Тогда (1) можно записать в виде:

$$x^n + [y(x)]^n = [z(x)]^n \qquad (3)$$

Продифференцируем (3) по переменной x, тогда получим:

$$nx^{n-1} + n[y(x)]^{n-1} * y'(x) = n[z(x)]^{n-1} * z'(x) \qquad (4)$$

или, сокращая обе части уравнения (4) на n (это можно сделать, так как n>2), получим:

$$x^{n-1} + [y(x)]^{n-1} * y'(x) = [z(x)]^{n-1} * z'(x) \qquad (5)$$

Продифференцируем уравнение (5) ещё раз по переменной x;

$$(n-1)x^{n-2} + (n-1)[y(x)]^{n-2} * [y'(x)]^2 + [y(x)]^{n-1} * y''(x) = (n-1)[z(x)]^{n-2} * [z'(x)]^2 + [z(x)]^{n-1} * z''(x) \qquad (6)$$

Предположим, что

$$z''(x) = y''(x) = 0 \qquad (7)$$

Математический смысл предположения (7) заключается в том, что функции y=y(x) и z=z(x) имеют нулевую кривизну, то есть являются линейными.

Тогда из (7) следует, что

$$\begin{cases} z'(x) = C \\ y'(x) = C_1 \end{cases} \qquad (8)$$

Или

$$\begin{cases} z(x) = Cx + C_2 \\ y(x) = C_1 x + C_3 \end{cases} \qquad (9)$$

Уравнение (1) при x = y = z = 0 справедливо, поэтому будем считать, что при x=0 в системе (9) $z(x)$ = y(x) = 0. Тогда из (9) следует, что $C_2 = C_3 = 0$ и

$$\begin{cases} z(x) = Cx \\ y(x) = C_1 x \end{cases} \qquad (10)$$

Подставим (7) и (10) в (6) получим:

$$(n-1)x^{n-2} + (n-1)(C_1 x)^{n-2} * C_1^2 = (n-1)(Cx)^{n-2} * C^2 \qquad (11)$$

или сокращая обе части (11) на (n-1) получим:

$$x^{n-2} + C_1^n x^{n-2} = C^n x^{n-2} \text{ или } 1 + C_1^n = C^n \qquad (12)$$

Запишем уравнение (12) в виде:

$$1 = C^n - C_1^n \qquad (13)$$

Так как в системе (10), в силу выше сделанных предположений, все перечисленные величины являются *целочисленными*, то C и C_1 могут удовлетворять следующим условиям:

1. C и C_1 – целые числа. Рассмотрим три разных случая:

1.1 C и C_1 – четные числа, то есть: C = 2q, C_1=2p, где p, q ϵ N

Тогда из (13) ⇔ $1 = (2q)^n - (2p)^n$ или $1 = 2^n(q^n - p^n)$ (14)

Из (14) следует, что левая часть этого равенства должна делится на 2^n, но это не так, поэтому уравнение (14) решений не имеет, то есть C, $C_1 \in \varnothing$

1.2 C – чётное число, а C_1 – нечётное, то есть:

C=2p, C_1=2q+1, причём, как это следует из (13) $C^n > C_1^n$, что соответствует условию $C > C_1$ или

$$2p > 2q + 1 \qquad (15)$$

Также из (12) ⇨ $C^n = 1 + C_1^n < (1 + C_1)^n$ ⇔ $C^n < (1 + C_1)^n$ ⇨ $C < 1 + C_1$ ⇨

$$2p < 1 + 2q + 1 \Leftrightarrow q > p - 1 \qquad (16)$$

Из условия (15), (16) и того, что C, $C_1 \in$ N следует система:

$$\begin{cases} \begin{cases} 2p < 2 + 2q \\ 2p > 2q + 1 \end{cases} \\ p > 0 \\ q > 0 \end{cases} \qquad (17)$$

Решим систему (17) при помощи методов линейного программирования [2, 3]. Для этого систему (17) запишем в виде:

$$\begin{cases} \begin{cases} q > p - 1 \\ q > p - 1/2 \end{cases} \\ p > 0 \\ q > 0 \end{cases} \qquad (18)$$

Для нахождения решения системы (18) рассмотрим координатную плоскость, на которой точки имеют координаты (p, q). Изобразим на этой плоскости точки, координаты которых удовлетворяют системе (18) (заштрихованная область, рис. 1.)

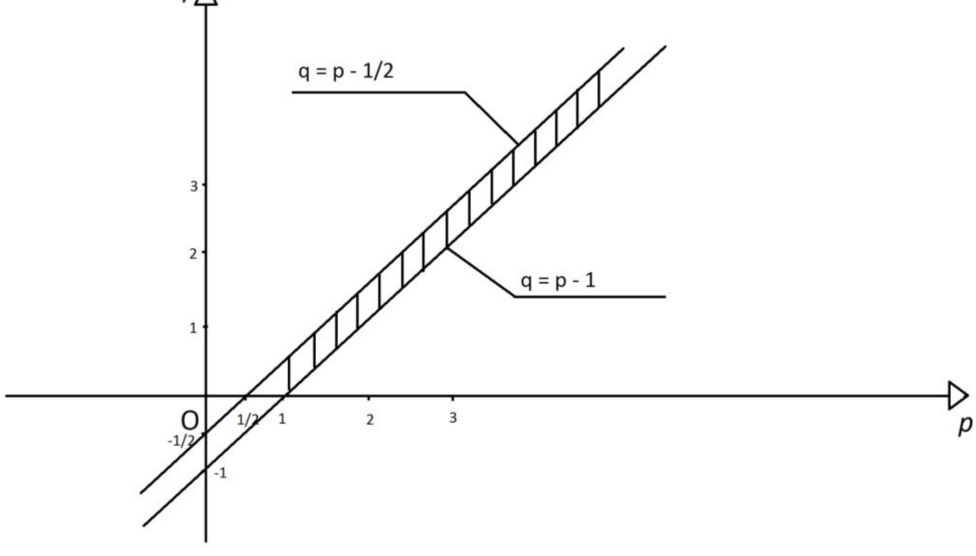

Рис. 1. Плоское множество для системы (18)

Как следует из рис. 1, множество точек, координаты которых удовлетворяют системе (18), является полосой, ширина и высота которой равна 0,5. Это означает, что на этом множестве не может быть точек, координаты которых одновременно были бы целыми числами. Действительно, пусть какая-то точка A(p, q) с целыми координатами принадлежит данному множеству. Пусть q=m $\in$ Z, тогда из (18) ⇨ $\begin{cases} m < p - 1/2 \\ m > p - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p > m + 1/2 \\ p < m + 1 \end{cases}$ ⇔ 1/2 + m < p < m + 1 ⇔ 1/2 < p – m < 1 ⇨ p – m = L/R, где L, R ϵ N и L < R

Из последнего равенства следует, что разность между двумя целыми числами является дробной, значит предположение о том, что p, q $\in$ Z – неверно.

Таким образом из рис. 1 следует, что в заштрихованной полосе нет точек, для которых p, q $\in$ N, то есть C, $C_1 \in \varnothing$.

1.3 C нечётное число, C_1 – чётное число, то есть: C = 2q + 1, $C_1 = 2$q. Тогда, по аналогии с предыдущим пунктом имеем:

$$\begin{cases} \begin{cases} 2q + 1 > 2p \\ 2q + 1 < 2p + 1 \end{cases} \\ p > 0 \\ q > 0 \end{cases} \qquad (19)$$

Запишем систему (19) в виде:

$$\begin{cases} \begin{cases} q > p - 1/2 \\ q < p \end{cases} \\ p > 0 \\ q > 0 \end{cases} \qquad (20)$$

Аналогично предыдущему пункту на координатной плоскости (p, q) определим множество точек, координаты которых удовлетворяют системе (20) (заштрихованная область, рис. 2).

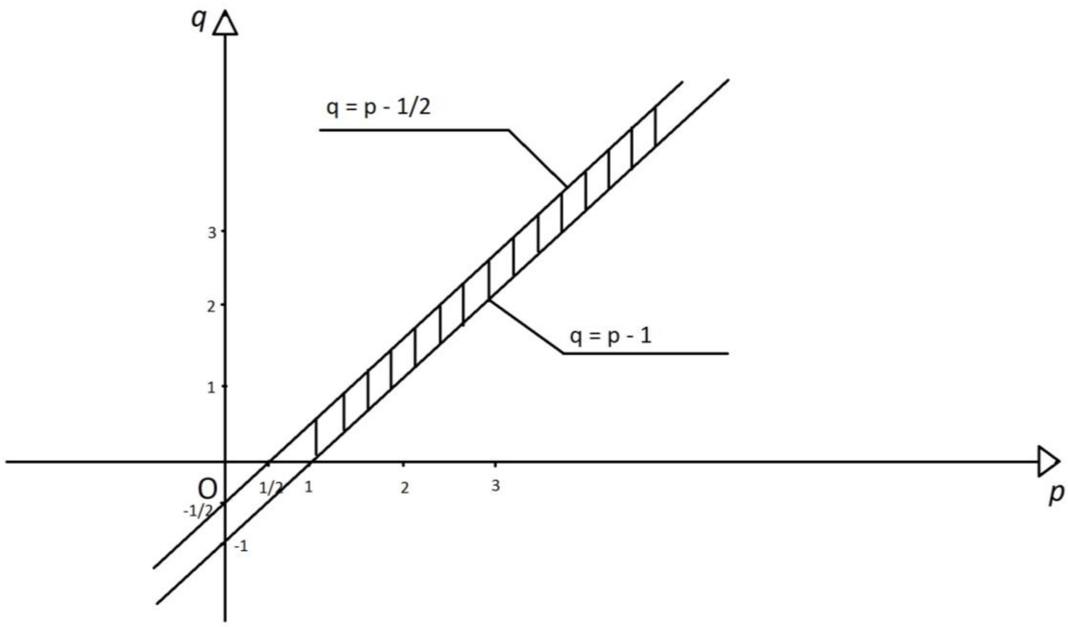

Рис. 2. Плоское множество для системы (20)

Из рисунка видно, что ширина и высота заштрихованной области меньше единицы, то есть эта область не содержит точек, координаты которых являлись бы одновременно натуральными числами, то есть p, q $\notin$ N, следовательно, C, $C_1 \in \varnothing$.

1.4 C и C_1 – дробные числа, то есть:

$$C = \frac{p}{q}, \; C_1 = \frac{p_1}{q_1} \qquad (21)$$

Как следует из (10) для того, чтобы при x$\in$ N функции z(x) и y(x) также были целочисленными необходимо, чтобы

$$q = x, \; q_1 = x \qquad (22)$$

Но q $и$ q_1 – постоянные числа, а x – переменная величина, то есть равенство в (22) невозможно, а это означает, что C, $C_1 \in \varnothing$.

Таким образом, можно сделать следующий вывод. При сделанных предположениях, а именно: z” = y” = 0, то есть функции z(x) и y(x) линейно зависят от переменной x, уравнение (1) решений не имеет. Для иллюстрации приведённого доказательства, рассмотрим несколько примеров, характеризующих рассмотренные случаи.

1.1 C и C_1 – четные числа, причём $C > C_1$, например:

$C = 4$, $C_1 = 2$ ⇨ $\begin{cases} z(x) = 4x \\ y(x) = 2x \end{cases}$

Пусть x = 2, тогда y = 4, z = 12, n = 3, тогда $2^3 + 4^3 \neq 8^3$

1.2 C – чётное, C_1 – нечётное и $C > C_1$, например:

$C = 4$, $C_1 = 3$ ⇨ $\begin{cases} z(x) = 4x \\ y(x) = 3x \end{cases}$

Пусть x = 2, тогда y = 6, z = 8, n = 3, то есть:

$2^3 + 6^3 \neq 8^3$

1.3 C – нечётное, C_1 – чётное и $C > C_1$, например:

$C = 5$, $C_1 = 4$ ⇨ $\begin{cases} z(x) = 5x \\ y(x) = 4x \end{cases}$

Пусть x = 2, тогда y = 8, z = 10, n = 3 ⇨ $2^3 + 8^3 \neq 10^3$

1.4 C и C_1 – дробные числа, причём $C > C_1$, пусть

x = 2 ⇨ $C = 5/2$, $C_1 = 3/2$ ⇨ $\begin{cases} z = \frac{5}{2}x = 5 \\ y = \frac{3}{2}x = 3 \end{cases}$

При n = 3 имеем:

$2^3 + 3^3 \neq 5^3$

Список литературы

1. *Туманов С.И.* Поиски решения задач, М.: Изд. «Просвещение», 1969. 278 стр.
2. *Банди Б.* Основы линейного программирования: Пер с англ. М.: «Радио и связь», 1989. 176 стр.
3. *Анисимова Н.П., Ванина Е.А.* Линейное программирование. Учебно-методическое пособие Санкт-Петербург: НИУ ВШЭ, 2012. 70 стр.