О прохождении электрического тока по цилиндрическому металлическому проводнику в вакууме
Блинов А. П.

Блинов Анатолий Павлович / Blinov Anatoliy Pavlovich – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра общей и теоретической физики, физический факультет, Ивановский государственный университет, г. Иваново

Аннотация: *рассмотрена задача о прохождении электрического тока по металлическому пространственно протяженному (цилиндрическому) проводнику в вакууме, когда основным механизмом отвода тепла с боковой поверхности является тепловое излучение в соответствии с законом Стефана-Больцмана. Считается, что диапазон возможных температур существенно выше температуры Дебая. Показано, что вольт-амперная характеристика (ВАХ) такого проводника является нелинейной.*
Ключевые слова: *электрический ток, вольтамперная характеристика (ВАХ), Джоулево тепло, вакуум, закон Стефана-Больцмана, цилиндрический металлический проводник, нелинейность.*

УДК 530.10

Введение

Рассмотрим проводник из чистого металла цилиндрической формы длиной l и радиусом R. Пусть l >> R и температура боковой поверхности проводника поддерживается постоянной и равной T_0.

Для чистых металлов, согласно закону Видемана-Франца, при температурах T, больших температуры Дебая [1],

$$\frac{\lambda}{\kappa}=\frac{1}{LT}, \qquad (1)$$

где L= $\frac{\pi^2}{3}(k_b/e)^2 = 2{,}45\cdot10^{-8}$ Вт Ом / град^2 – число Лоренца, κ и λ - коэффициенты теплопроводности и электропроводности, причём κ не зависит от температуры (k_b - постоянная Больцмана).

Как показано в [1], температура T в стационарном случае будет зависеть только от радиальной переменной r (0 □ r □ R) и удовлетворять уравнению:

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}+\frac{a}{T}=0, \qquad (2)$$

где $a \equiv E^2/L = U^2/l^2L$ (U - напряжение на концах проводника).

Уравнение (2) следует решать с дополнительными условиями:

$$T(R)=T_0; \qquad (3)$$

$$T_r^{/}(R) = -A = Const \qquad (4)$$

(A □ 0)

При этом [1], вольт-амперная характеристика (ВАХ) $I = I(U)$ определяется следующим образом: ток

$$I=\frac{2\pi\kappa AR}{E}. \qquad (5)$$

Кроме того, для уравнения (2) следует считать, что

$$\lim(r\frac{dT}{dr}) \to 0 \text{ при } r \to 0 \qquad (6)$$

Условие (6) с учетом начальных условий (3) – (4) позволяет осуществлять отбор варьируемой величины A в зависимости от $a = E^2/L = U^2/l^2L$.

Постановка задачи и результаты

Целью дальнейшего рассмотрения является ситуация, когда протяженный цилиндрический проводник находится в вакууме. В этом случае отвод тепла с его боковой поверхности в окружающее пространство может осуществляться за счет таких механизмов, как 1) тепловое излучение, 2) термоэлектронная эмиссия, 3) испарение металла. Как показывают оценки, из-за экспоненциального фактора $\exp(-\frac{\varphi}{k_b T})$ (φ - работа выхода) в области температур вблизи режима плавления металла тепловое излучение существенно превосходит механизмы 2) и 3) (см. выше) [1], [2]. Таким образом, для «серого» тела со степенью $\alpha < 1$ его отличия от абсолютно черного следует положить

$$A = \alpha \cdot \sigma T_0^4 / k \propto T_0^4, \qquad (7)$$

где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\, Вт/(м^2 K^4)$ - постоянная Стефана-Больцмана, т.е. при решении уравнения (2) с начальными условиями (3) – (4), в которых необходимо учитывать (7), температура T_0 боковой поверхности проводника подбирается такой, чтобы решение уравнения (2) удовлетворяло условию (6). Другими словами, в стационарном режиме протекания тока по проводнику в вакууме температура T_0 его боковой поверхности устанавливается в соответствии с условием энергетического баланса, т. е. является функцией $a \equiv E^2 / L = U^2 / l^2 L$: $T_0 = T_0(a) = f(U)$.

Численные расчеты с использованием компьютерной программы MAPLE-7 при решении уравнения (2) приводят к следующим результатам, которые приблизительно можно изобразить в аналитическом виде. Именно, пусть

$$x = \lg\left(\frac{aR^2}{\left(\frac{k}{\alpha R \delta_\sigma}\right)^{2/3}}\right) \equiv \lg \tilde{U}^2 = 2\lg \tilde{U}; \qquad y = \lg\left(\frac{\sigma T_0^4}{\delta_\sigma \left(\frac{k}{\alpha R \delta_\sigma}\right)^{4/3}}\right) \equiv \lg\left(\frac{A}{\delta_\sigma \alpha \left(\frac{k}{\alpha R \delta_\sigma}\right)^{4/3}}\right) \equiv \lg \tilde{A},$$

(8)

где δ_σ - коэффициент, равный единице с размерностью постоянной Стефана-Больцмана в системе СИ, т.е. $\delta_\sigma = 1\, Вт/(м^2 K^4)$. Тогда

$$y(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{\pi}\left[x \cdot arctgx - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right] - \frac{1}{2\pi\lambda}\exp(-\lambda x^2) + \frac{3\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\lambda}} erf(x\sqrt{\lambda}), \qquad (9)$$

где $erf(t)$ - интеграл ошибок [3], а $\lambda \approx 0{,}036$.

Указания на получение формулы (9) связаны с детальным изучением численных данных компьютерного решения уравнения (2), из которых видно, что при $a \to 0$, т.е. при $x \to -\infty$ $y' \equiv \frac{dy}{dx} \to 1$ ($y \to x$), как и должно быть при слабых электрических полях ($a = E^2/L$), поскольку согласно (5) ток $I \propto A/E \propto a/E \propto E \propto U$, т.к. из-за (7) – (8) $A \propto a$. Кроме того, при $x \to +\infty$ $y' \equiv \frac{dy}{dx} \to 0$, а при $x = 0$ $y'(0) \approx 2$ и $y''(0) \approx 0$ (перегиб). Это позволяет искать приблизительное аналитическое решение исходя из свойств производной $y'(x)$, например, в виде

$$y'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} arctgx + \frac{1}{\pi}(x + \frac{3\pi}{2})\exp(-\lambda x^2). \qquad (10)$$

Интегрируя далее (10), получаем (9). При этом константа $\lambda \approx 0{,}036$ находится из условия, что $y(0) \approx -4{,}45$, найденного при фактическом решении уравнения (2). Графически зависимость (9) и в главных чертах поведение численного решения уравнения (2) изображены на рис. 1.

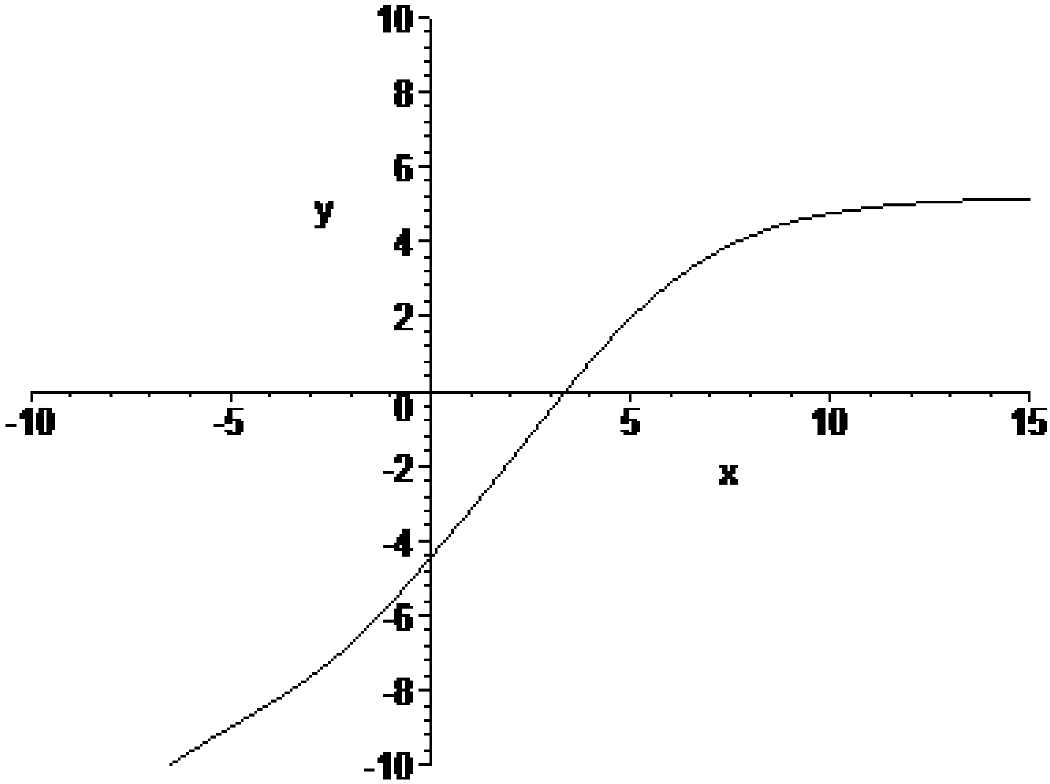

Рис. 1. Зависимость y=y(x) (см (8) – (9))

Введем «безразмерное» напряжение $\tilde{U} \equiv \left[\dfrac{aR^2}{\left(\dfrac{k}{\alpha R \delta_\sigma} \right)^{2/3}} \right]^{1/2} \propto a^{1/2} \propto U$, а также «безразмерный» ток $\tilde{I} \equiv \dfrac{\tilde{A}}{\tilde{U}} \equiv \left(\dfrac{A}{\delta_\sigma \alpha \left(\dfrac{k}{\alpha R \delta_\sigma} \right)^{4/3}} \right) / \tilde{U} \equiv \dfrac{10^{y(\tilde{U})}}{\tilde{U}} \propto \dfrac{A}{U} \propto I$ в соответствии с (7) и обозначениями (8)-(9).

Ясно, что зависимость $\tilde{I} = I(\tilde{U})$, приведенная графически на рис. 2, отражает истинную ВАХ $I = I(U)$. **<u>Нелинейность</u>** последней очевидна.

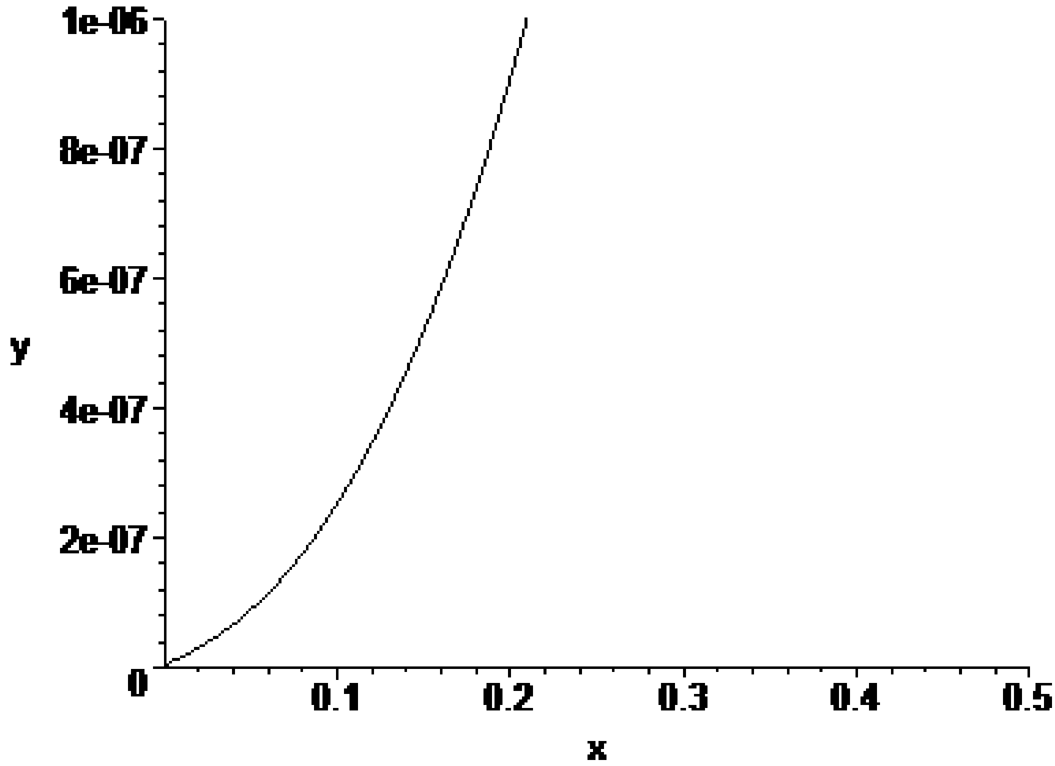

Рис. 2. Зависимость $\tilde{I} = I(\tilde{U})$ *«безразмерного» тока* $\tilde{I}$ *(ось OY) от «безразмерного» напряжения* $\tilde{U}$ *(ось OX)*

Следует отметить, что полученные результаты относятся к области температур гораздо выше температуры Дебая. При низких температурах протекание электрического тока в протяженном проводнике в вакууме требует специального рассмотрения.

Литература

1. *Блинов А. П.* О прохождении электрического тока по цилиндрическому металлическому проводнику. / Журнал ФЭН-НАУКА. № 10 (49), 2015 г. Республика Татарстан, г. Бугульма, 2015 г.
2. *Кнаке О., Странский И. Н.* Успехи физических наук. Т. LXVII1. Вып. 2, 1959.
3. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М., 1973.