О методе непосредственного интегрирования
Алдабергенов А. К.

Алдабергенов Абай Капанович / Aldabergenov Abai Kapanovich – кандидат технических наук, доцент ВАК СССР, профессор,
кафедра энергетики и машиностроения,
Костанайский инженерно–экономический университет, г. Костанай, Республика Казахстан

Аннотация: *в работе методом непосредственного интегрирования без ввода каких–либо дополнительных условий и ограничений получены уравнения деформаций, совпадающие с известными уравнениями метода начальных параметров. В этом заключается ее научная новизна.*
Ключевые слова: *балка, деформация, изгиб, уравнение, нагрузка, растяжение, сжатие, кручение.*

В статье [1, с. 47] приведены универсальные формулы для определения постоянных интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки в виде:

$$C_n = EI\theta_0 + m_i \cdot a_i - P_i \cdot \frac{b_i^2}{2} - q_i \cdot \frac{d_i^3 - c_i^3}{6};$$

$$D_n = EIw_0 - m_i \cdot \frac{a_i^2}{2} + P_i \cdot \frac{b_i^3}{6} + q_i \cdot \frac{d_i^4 - c_i^4}{24}. \quad (1)$$

где, $n-$ номер участка; $i-$ номер нагрузки; a_i, b_i, c_i и d_i – характерные расстояния от начала координат до нагрузок.

Замечено, что в выражениях первого и второго интегралов дифференциального уравнения имеются общие закономерности. Поэтому для балки (рис. 1) ограничимся приведением лишь следующих интегралов:

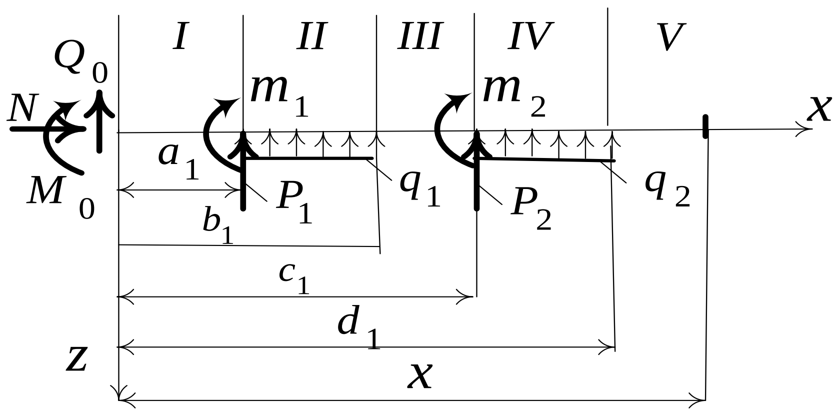

Рис. 1. Изгиб балки

первый интеграл пятого участка:

$$a)\ EI\theta_5 = -M_0 \cdot x - Q_0 \cdot \frac{x^2}{2} - m_1 \cdot (x - a_1) - P_1 \frac{(x-a_1)^2}{2} -$$

$$-q_1 \cdot (b_1 - a_1)\frac{x^2 - b_1 x - a_1 x}{2} - q_1 \frac{b_1^3 - a_1^3}{6} - m_2 \cdot (x - c_1) - P_2 \frac{(x-c_1)^2}{2} -$$

$$-q_2 \cdot (d_1 - c_1)\frac{x^2 - d_1 x - c_1 x}{2} - q_2 \frac{d_1^3 - c_1^3}{6}. \quad (2)$$

вторые интегралы всех участков: $EIw_1 = EIw_0 + EI\theta_0 \cdot x - M_0 \frac{x^2}{2} - Q_0 \frac{x^3}{6};$

$$EIw_2 = EIw_0 + EI\theta_0 \cdot x - M_0\frac{x^2}{2} - Q_0\frac{x^3}{6} - m_1\frac{(x-a_1)^2}{2} - P_1\frac{(x-a_1)^3}{6} - q_1\frac{(x-a_1)^4}{24}$$

;

$$EIw_3 = EIw_0 + EI\theta_0 \cdot x - M_0\frac{x^2}{2} - Q_0\frac{x^3}{6} - m_1\frac{(x-a_1)^2}{2} - P_1\frac{(x-a_1)^3}{6} -$$

$$- q_1\cdot(b_1-a_1)(\frac{x^3}{6} - b_1\frac{x^2}{4} - a_1\frac{x^2}{4}) - q_1\frac{b_1^3-a_1^3}{6}x + q_1\frac{b_1^4-a_1^4}{24};$$

$$EIw_4 = EIw_0 + EI\theta_0 \cdot x - M_0\frac{x^2}{2} - Q_0\frac{x^3}{6} - m_1\frac{(x-a_1)^2}{2} - P_1\frac{(x-a_1)^3}{6} -$$

$$- q_1\cdot(b_1-a_1)(\frac{x^3}{6} - b_1\frac{x^2}{4} - a_1\frac{x^2}{4}) - q_1\frac{b_1^3-a_1^3}{6}x + q_1\frac{b_1^4-a_1^4}{24} -$$

$$- m_2\frac{(x-c_1)^2}{2} - P_2\frac{(x-c_1)^3}{6} - q_2\frac{(x-c_1)^4}{24};$$

б) $$EIw_5 = EIw_0 + EI\theta_0 \cdot x - M_0\frac{x^2}{2} - Q_0\frac{x^3}{6} - m_1\frac{(x-a_1)^2}{2} - P_1\frac{(x-a_1)^3}{6} -$$

$$- q_1\cdot(b_1-a_1)(\frac{x^3}{6} - b_1\frac{x^2}{4} - a_1\frac{x^2}{4}) - q_1\frac{b_1^3-a_1^3}{6}x + q_1\frac{b_1^4-a_1^4}{24} -$$

$$- m_2\frac{(x-c_1)^2}{2} - P_2\frac{(x-c_1)^3}{6} - q_2(d_1-c_1)(\frac{x^3}{6} - d_1\frac{x^2}{4} - c_1\frac{x^2}{4}) - q_2\frac{d_1^3-c_1^3}{6} + q_2\frac{d_1^4-c_1^4}{24}. \quad (3)$$

Проанализируем систему уравнений (3). В первых четырех уравнениях системы наблюдаются следующие закономерности: 1) в уравнениях содержатся только те силы, которые расположены левее данного участка; 2) каждый вид нагрузки входит в уравнение в виде слагаемого определенного типа; 3) в уравнении деформаций данного участка полностью сохраняются уравнения деформаций предыдущих участков. А на участке (пятый), последующем за участком с распределенной нагрузкой, эти закономерности нарушаются. Возникла мысль: может быть, имеется нарушение лишь по внешним видам уравнений? Чтобы получить ответы на этот вопрос, преобразуем уравнения *а*):

$$q(d-c)\frac{x^2-cx-dx}{2} + q\frac{d^3-c^3}{6} = q\frac{3dx^2-3dcx-3d^2x-3cx^2+3c^2x+3dcx+d^3-c^3+x^3-x^3}{6}$$

=

$$= q[\frac{(x-c)^3}{6} - \frac{(x-d)^3}{6}]$$ (индексы опущены)

аналогично, в уравнении *б*) получим слогаемое:

$$-q[\frac{(x-c)^4}{24} - \frac{(x-d)^4}{24}]$$

С учетом этих преобразований последние уравнения (2) и (3) запишутся так:

а) $$EI\theta_5 = EI\theta_0 - M_0x - Q_0\frac{x^2}{2} - m(x-a) - P\frac{(x-b)^2}{2} - q[\frac{(x-c)^3}{6} - \frac{(x-d)^3}{6}]. \quad (2а)$$

б) $$EIw_5 = EIw_0 + EI\theta_0 x - M_0\frac{x^2}{2} - Q_0\frac{x^3}{6} - m\frac{(x-a)^2}{2} -$$

$$-P\frac{(x-b)^3}{6} - q[\frac{(x-c)^4}{24} - \frac{(x-d)^4}{24}]. \quad (3а)$$

Как видим, в уравнениях (2а) и (3а) соблюдаются все вышеуказанные закономерности. Оказалось, что в прежних уравнениях закономерности существуют в скрытой форме. Для обобщения полученных выше результатов перейдем к новым обозначениям расстояний. Расстояния от начала координат до сосредоточенного момента m_i обозначим через a_i (прежние $a_i \to a_i, c_i \to a_i$); до сосредоточенной силы P_i – через b_i (прежние $a_i \to b_i, c_i \to b_i$); до началаи конца распределенной нагрузки q_i – через c_i (прежние $a_i \to c_i, c_i \to c_i$) и d_i (прежние $b_i \to d_i, d_i \to d_i$). Для общего случая изгиба уравнения(2) и (3) можно обобщить и записать в виде:

$$EI\theta_x = EI\theta_0 - M_0 \cdot x - Q_0 \cdot \frac{x^2}{2} - m_i \cdot (x - a_i) - P_i \cdot \frac{(x - b_i)^2}{2} - q_i \cdot [\frac{(x - c_i)^3}{6} - \frac{(x - d_i)^3}{6}]$$

$$EIw_x = EIw_0 + EI\theta_0 \cdot x - M_0 \cdot \frac{x^2}{2} - Q_0 \cdot \frac{x^3}{2} - m_i \cdot \frac{(x - a_i)^2}{2} -$$

$$- P_i \cdot \frac{(x - b_i)^3}{6} - q_i \cdot [\frac{(x - c_i)^4}{24} - \frac{(x - d_i)^4}{24}], \qquad (4)$$

Эти уравнения назовем универсальными уравнениями деформаций изгиба. Ими можно пользоваться при расчете балки, состоящей из любого количества участков. В них содержатся две константы интегрирования $EI\theta_0$ и EIw_0. Поэтому утверждение о том, что метод непосредственного интегрирования неудобен для расчета балок с большим числом участков, не состоятельно. Насколько известно автору, такое решение ранее никем еще не получено. Нетрудно заметить, что эти уравнения полностью совпадают с известными универсальными уравнениями метода начальных параметров.

По результатам работы можно сделать следующие выводы:

1) продолжая известный метод непосредственного интегрирования, без ввода каких–либо дополнительных условий или ограничений, получены решения (4) дифференциального уравнения изогнутой оси любой балки при любых нагружениях. В этом и заключается ее научная новизна;

2) в отличие от данной работы, в методе начальных параметров для вывода уравнений введены дополнительные условия [2, с. 339]. Поэтому его надо отнести к категории некорректного метода;

3) методы непосредственного интегрирования и начальных параметров не следует рассматривать как самостоятельные методы. Второй вытекает из первого при соблюдении дополнительных условий.

В данной работе доказано, что дифференциальное уравнение для любого случая изгиба имеет решения (4), полученные Алдабергеновым. Следовательно, от методов начальных параметров и непосредственного интегрирования можно полностью отказаться.

Литература

1. *Алдабергенов А. К.* Новое в методе непосредственного интегрирования.
2. Проблемы современной науки и образования № 5 (47). Иваново, 2016 г. Изд. «Проблемы науки».
3. *Писаренко Г. С.* Сопротивление материалов. Киев: Изд. тех. литературы, 1963. 792 с.