Регуляризация нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода

Каракеев Т. Т.[1], Мустафаева Н. Т.[2]

[1]*Каракеев Таалайбек Тултемирович / Karakeev Taalaibek Tultemirovich – доктор физико-математических наук, профессор;*
[2]*Мустафаева Нагима Таировна / Mustafaeva Hagima Tairovna – аспирант,*
кафедра информационных технологий и программирования,
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, г. Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация: *в работе изучаются вопросы регуляризации нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. Получен регуляризирующий оператор, доказана равномерная сходимость регуляризованного решения к точному решению рассматриваемых уравнений в шаре.*

Ключевые слова: *уравнение Вольтерра, малый параметр, равномерная сходимость.*

Пусть $N_0(x,t,u(t)) = K(x,t)u(t) + N(x,t,u(t))$ и известные функции $f(x)$, $K(x,t)$, $N(x,t,u(t))$, подчиняются условиям:

а) $f(x) \in C^1[0,b], K(x,t) \in C(D)$, $K(x,x) \geq 0$, $D = \left\{\frac{x,t}{0} \leq t \leq x \leq b\right\}$;

б) $G(x) \geq d_1$, $G(x) = C_1 f(x) + K(x,x)$, $f(0) = 0,\ 0 < d_1,\ C_1 = const$;

в) $N(x,t,u) \in C(D \times R^1)$, $N(x,x,u)$=0,
$|N(x,s,u) - N(x,s,w) - N(t,s,w) + N(t,s,u)| \leq L_N(x-t)|u-w|$,
$0 < L_N = const$.

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^x N_0(x,t,u(t))dt = f(x), \qquad (1)$$

в предположении, что решение существует и принадлежит пространству $C[0,b]$.

Пусть T – оператор Вольтерра вида $(Tv)(x) = \int_0^x u(t)v(t)dt$, I - единичный оператор. Действуя оператором $I + C_1 T$ из (1), получим уравнение

$$\int_0^x G(t)u(t)dt = \int_0^x M(x,t,u(t))dt + C_1\left[\int_0^x u(t)dt \int_t^x K(s,t)u(s)ds + \right.$$
$$\left. + \int_0^x \int_t^x N(s,t,u(t))u(s)ds\,dt\right] + f(x), \qquad (2)$$

где $M(x,t,u(t)) = [K(t,t) - K(x,t)]u(t) - N(x,t,u(t))$.

Для уравнения (2) рассмотрим уравнение с малым параметром $\varepsilon \in (0,1)$ следующего вида [1]

$$\varepsilon u_\varepsilon(x) + \int_0^x G(t)u_\varepsilon(t)dt = \int_0^x M(x,t,u_\varepsilon(t))dt + C_1\left[\int_0^x u_\varepsilon(t)dt \int_t^x K(s,t) \times \right.$$
$$\left. \times u_\varepsilon(s)ds + \int_0^x \int_t^x N(s,t,u_\varepsilon(t))u_\varepsilon(s)ds\,dt\right] + \varepsilon u(0) + f(x). \qquad (3)$$

Воспользуемся резольвентой ядра $\left(-\frac{G(t)}{\varepsilon}\right)$ и преобразуем уравнение (3) к виду

$$u_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s)\,ds\right)G(t) \times \left\{\int_0^t M\left(t,s,u_\varepsilon(s)\right)ds - \right.$$
$$- \int_0^x M(x,s,u_\varepsilon(s))ds + C_1\left[\int_0^t u_\varepsilon(s)ds \int_s^t K(v,s)u_\varepsilon(v)dv - \right.$$
$$- \int_0^x u_\varepsilon(s)ds \int_s^x K(v,s)u_\varepsilon(v)dv + \int_0^t \int_s^t N(v,s,u_\varepsilon(s))u_\varepsilon(v)dvds -$$

$$-\int_0^x\int_s^x N(\nu,s,u_\varepsilon(s))u_\varepsilon(\nu)d\nu ds\Big]+f(t)-f(x)\Big\}dt+\frac{1}{\varepsilon}exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x G(s)ds\right)\times$$
$$\times\left\{\int_0^x M(x,t,u_\varepsilon(t))\,dt+C_1\int_0^x u_\varepsilon(t)dt\int_t^x K(s,t)u_\varepsilon(s)ds+\right.$$
$$\left.+C_1\int_0^x\int_t^x N(s,t,u_\varepsilon(t))u_\varepsilon(s)dsdt+\varepsilon u(0)+f(x)\right\}\equiv\left(Au_\varepsilon\right)(x). \qquad \mathbf{(4)}$$

Пусть

$\bar{u}_\varepsilon(x),\quad \tilde{u}_\varepsilon\quad (x)\in\Omega[0,b]=\{u(x)\in C[0,b]\colon\ |u(x)-u_0|\le r_0,\qquad 0<u_0,\ r_0=const\}.$

Оценим разность операторов $(A\bar{u}_\varepsilon)(x)-(A\tilde{u}_\varepsilon)(x).$ Тогда

$$\left|\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s)\,ds\right)G(t)\left[\int_0^t\left[N\left(x,s,\bar{u}_\varepsilon(s)\right)-N\left(x,s,\tilde{u}_\varepsilon(s)\right)\right]ds\right.\right.-$$
$$\left.\left.-\int_0^t\left[N\left(t,s,\bar{u}_\varepsilon(s)\right)-N\left(t,s,\tilde{u}_\varepsilon(s)\right)\right]ds\right]dt\right|\le\frac{L_N}{\varepsilon^2}\int_0^x exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s)ds\right)\times$$
$$\times G(t)(x-t)\int_0^t|\bar{u}_\varepsilon(s)-\tilde{u}_\varepsilon(s)|ds\,dt\le\frac{L_N}{d_1}\int_0^x|\bar{u}_\varepsilon(t)-\tilde{u}_\varepsilon(t)|dt;$$

$$\left|\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s)\,ds\right)G(t)\int_t^x\left[N\left(x,s,\bar{u}_\varepsilon(s)\right)-N\left(x,s,\tilde{u}_\varepsilon(s)\right)\right]ds\,dt\right|\le$$

$$\le\frac{L_N}{\varepsilon^2}\int_0^x\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s)\,ds\right)G(t)\int_t^x|\bar{u}_\varepsilon(s)-\tilde{u}_\varepsilon(s)|ds\ dt\le$$

$$\le\frac{L_N}{d_1}\|\bar{u}_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]},\qquad \|\cdot\|_{C[0,b]}=\max_{[0,b]}|\cdot|;$$

$$\left|\frac{C_1}{\varepsilon^2}\int_0^x\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s)\,ds\right)G(t)\int_0^t\int_t^x N\left(\nu,s,\bar{u}_\varepsilon(s)\right)\left[\bar{u}_\varepsilon(\nu)-\tilde{u}_\varepsilon(\nu)\right]d\nu ds\,dt\right|\le$$

$$\le\frac{C_1M_Nb}{\varepsilon^2}\int_0^x\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s)\,ds\right)G(t)\int_t^x|\bar{u}_\varepsilon(\nu)-\tilde{u}_\varepsilon(\nu)|d\nu\,dt\le\frac{C_1M_Nb}{\varepsilon^2}\times$$
$$\times\|\bar{u}_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]},\qquad M_N=\max_{D\times R^1}|N(x,t,u_\varepsilon(t))|;$$

$$\left|\frac{C_1}{\varepsilon^2}\int_0^x\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s)\,ds\right)G(t)\int_t^x\int_s^x N\left(\nu,s,\bar{u}_\varepsilon(s)\right)\left[\bar{u}_\varepsilon(\nu)-\tilde{u}_\varepsilon(\nu)\right]d\nu ds\,dt\right|$$

$$\le\frac{C_1M_N}{\varepsilon^2}\int_0^x exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s)\,ds\right)G(t)(x-t)\int_0^x\left|\bar{u}_\varepsilon(\nu)-\tilde{u}_\varepsilon(\nu)\right|d\nu\,dt\le$$

$$\le\frac{C_1M_N}{d_1}\int_0^x|\bar{u}_\varepsilon(t)-\tilde{u}_\varepsilon(t)|dt;$$

$$\left|\frac{C_1}{\varepsilon^2}\int_0^x\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s)\,ds\right)G(t)\left\{\int_0^t\int_t^x\left[N\left(\nu,s,\bar{u}_\varepsilon(s)\right)-N\left(\nu,s,\tilde{u}_\varepsilon(s)\right)\right]\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\tilde{u}_\varepsilon(\nu)d\nu\,ds+\int_t^x\int_s^x\left[N\left(\nu,s,\bar{u}_\varepsilon(s)\right)-N\left(\nu,s,\tilde{u}_\varepsilon(s)\right)\right]\tilde{u}_\varepsilon(\nu)d\nu\,ds\right\}dt\right|\le$$

$$\le \frac{2C_1 r L_N}{\varepsilon^2}\int_0^x |\bar u_\varepsilon(t) - \tilde u_\varepsilon(t)|dt \int_0^x \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s)\,ds\right) G(t)(x-t)dt \le$$

$$\le \frac{2C_1 r L_N}{d_1}\int_0^x |\bar u_\varepsilon(t) - \tilde u_\varepsilon(t)|dt, \qquad r = r_0 + u_0;$$

$$\left|\frac{1}{\varepsilon} exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x G(s)ds\right)\int_0^x [N\left(x,t,\bar u_\varepsilon(t)\right) - N\left(x,t,\tilde u_\varepsilon(t)\right)]dt\right| \le$$

$$\le \frac{L_N}{ed_1}\|\bar u_\varepsilon(x) - \tilde u_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]};$$

$$\left|\frac{C_1}{\varepsilon} exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x G(s)ds\right)\left\{\int_0^x \int_t^x N\left(s,t,\bar u_\varepsilon(t)\right)\left[\bar u_\varepsilon(s) - \tilde u_\varepsilon(s)\right] ds\,dt +\right.\right.$$

$$+ \int_0^x \int_t^x [N(s,t,\bar u_\varepsilon(t)) - N(s,t,\tilde u_\varepsilon(t))]\, \bar u_\varepsilon(s)ds\,dt\}\Big| \le C_1/d_1\ [M$$

$$-\tilde u_\varepsilon(s)|ds + r L\int_0^x |\bar u_\varepsilon(t) - \tilde u_\varepsilon(t)|dt\Big]\frac{1}{\varepsilon} exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x G(s)ds\right)\int_0^x G(s)ds \le$$

$$\le \frac{C_1\left((M)_N + rL_N\right)}{ed_1}\int_0^x \left|\bar u_\varepsilon(t) - \tilde u_\varepsilon(t)\right| dt.$$

Таким образом, из уравнения (4) получим следующее неравенство:

$$|(A\bar u_\varepsilon)(x) - (A\tilde u_\varepsilon)(x)| \le \left(q_0 b + q_2\right)\|\bar u_\varepsilon(x) - \tilde u_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} +$$

$$+(q_1 + q_3)\int_0^x |\bar u_\varepsilon(t) - \tilde u_\varepsilon(t)|dt, \qquad (5)$$

где $q_2 = \left(L_N\left(1 + e^{-1}\right) + C_1 M_N b\right)d_1^{-1}$; $q_3 = (L_N + C_1(2M_N + 3L_N r))d_1^{-1}$,

$q_0 = 2C_1 Mr\, d_1^{-1}$; $\quad q_1 = \left(L_k\left(2 + e^{-1}\right) + 2C_1 Mr\left(1 + e^{-1}\right)\right)d_1^{-1}$,

$M = \max\limits_{x\in[0,b]} |K(x,t)|$. Вычисление значений q_0, q_1 приводится в [3].

Переходя к норме в обеих частях неравенства (5), получим

$$\|(A\bar u_\varepsilon)(x) - (A\tilde u_\varepsilon)(x)\|_{C[0,b]} \le q\|\bar u_\varepsilon(x) - \tilde u_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}, \qquad (6)$$

где $q = (q_0 + q_1 + q_3)b + q_2$.

Если $q < 1$, то можно доказать [4, с. 392] существование единственного непрерывного решения уравнения (3) в шаре $\Omega[0,b]$.

Для оператора $(H_\varepsilon u)(x)$, заданного в виде

$$(H_\varepsilon u)(x) \equiv -\int_0^x exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s)ds\right)G(t)[u(t) - u(x)]dt +$$

$$+\exp\left[\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x G(s)\,ds\right)[u(x) - u(0)\right],$$

имеет место [2] следующая лемма.

Лемма. При выполнении условий *а) - г)* и $u(x) \in C[0,b]$ имеет место оценка

$$\|\varepsilon(H_\varepsilon u)(x)\|_{C[0,b]} \le 3\|u(x)\|_{C[0,b]} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}\right) + d_3\omega_u(\varepsilon^\beta),$$

где $\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right) = \sup\limits_{|x-t|\le\varepsilon^\beta} |u(x) - u(t)|,\ 0 < \beta < 1$.

Теорема. Пусть выполняются условия *а*) - *в*), $q < 1$ и уравнение (1) имеет решение $u(x) \in \Omega[0, b]$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ решение уравнения (3) равномерно сходится к решению уравнения (1), при этом справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon(x) - u(x)\|_{C[0,b]} \leq (1-q)^{-1}\left(3\|u(x)\|_{C[0,b]} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}\right) + \omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)\right),$$

где $\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right) = \sup\limits_{|x-t| \leq \varepsilon^\beta} |u(x) - u(t)|, 0 < \beta < 1$.

Доказательство. Введем подстановку:

$$\eta_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - u(x). \tag{7}$$

Тогда из (4) получим уравнение

$$\eta_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s)\,ds\right) G(t)\left\{\int_t^x [[M\left(x,s,u(s)\right)]] - M\left(x,s,u_\varepsilon(s)\right)\right.$$

$$+\int_0^t [M(t,s,u_\varepsilon(s)) - M(t,s,u(s)) + M(x,s,u_\varepsilon(s)) - M(x,s,u(s))]\,ds +$$

$$+\int_0^t \eta_\varepsilon(s)ds \int_t^x K(v,s)u_\varepsilon(v)dv - \int_t^x \eta_\varepsilon(s)ds \int_s^x K(v,s)u_\varepsilon(v)dv +$$

$$+\int_0^t u(s)ds \int_t^x K(v,s)\eta_\varepsilon(v)dv - \int_t^x u(s)ds \int_s^x K(v,s)\eta_\varepsilon(v)dv +$$

$$+\int_0^t \int_t^x N(v,s,u_\varepsilon(s))\eta_\varepsilon(v)dv\,ds + \int_t^x \int_s^x N(v,s,u_\varepsilon(s)) \times \eta_\varepsilon(v)dv\,ds +$$

$$+\int_0^t \int_t^x [N(v,s,u_\varepsilon(s)) - N(v,s,u(s))]u(v)dv\,ds +$$

$$\left.+\int_t^x \int_s^x [N(v,s,u_\varepsilon(s)) - N(v,s,u(s))]u(v)dv\,ds\right] + \varepsilon[u(t) - u(x)]\bigg\}dt +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x G(s)\,ds\right)\left\{\int_0^x [M(x,t,u_\varepsilon(t)) - M(x,t,u(t))]\,dt +\right.$$

$$+C_1\left[\int_0^x \eta_\varepsilon(t)dt \int_t^x K(s,t)u_\varepsilon(s)ds + \int_0^x u(t)dt \int_t^x K(s,t)\eta_\varepsilon(s)ds +\right.$$

$$+\int_0^x \int_t^x N(s,t,u(t))\eta_\varepsilon(s)ds\,dt + \int_0^x \int_t^x [N(s,t,u_\varepsilon(t)) - N(s,t,u(t))]u_\varepsilon(s)ds + \varepsilon(u(x) - u$$

Используя оценку (6) из (8) имеем

$$\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} \leq q\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + \|(H_\varepsilon u)(x)\|_{C[0,b]}.$$

В силу леммы, подстановки (7) и условия $q < 1$ приходим к оценке теоремы. При этом $u_\varepsilon(x) \to u(x)$ равномерно, если $\varepsilon \to 0$. Теорема доказана.

Следствие. При выполнении условий теоремы решение уравнения (1) единственно в $\Omega[0, b]$.

Литература

1. *Денисов А. М.* О приближенном решении уравнения Вольтерра первого рода // ЖВМ и МФ, 1975. – Т. 15, № 4 – С. 1053–1056.
2. *Иманалиев М. И., Асанов А.* Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Исслед. по интегро–дифференц. уравнениям – Фрунзе: Илим, 1988. – Вып. 21. – С. 3–38.
3. *Каракеев Т. Т.,Мустафаева Н.* Регуляризация интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына, 2014. - Выпуск 5. - С. 19-22.
4. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1980. – 496 с.