Самоорганизованная критическая динамическая система на основе BTW-механизма
Лапаев М. А.

Лапаев Михаил Андреевич / Lapaev Mikhail Andreevich – студент магистратуры,
кафедра прикладной математики,
факультет прикладная математика и информационные технологии,
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, г. Москва

Аннотация: *в данной статье будет рассмотрена модель самоорганизованной критичности, а также будет проверена гипотеза о степенном распределении размеров событий в системе на основе BTW-механизма.*
Ключевые слова: *степенное распределение, самоорганизованная критичность, динамические системы.*

Термин «самоорганизованная критичность» впервые был использован в работе Бака, Танга и Визенфельда, вышедшей в 1987. Было замечено, что системы в процессе их естественного функционирования приходят в состояние на границе между стабильным и нестабильным.

Самоорганизованная критичность представляет собой характеристику динамических систем. В общем виде она описывает существование некоторого критического значения основных физических показателей системы [2]. Базовой моделью самоорганизованной критичности является «песчаная куча», представляющая собой простейшую реализацию механизма Бака-Танга-Визенфельда (BTW-механизма).

Для данной модели на основании самоподобной карты элементов определяется множество $\mathrm{W_L}$, на котором функционирует данная динамическая система. Предположим, что $S_{0,L}$ – квадрат с L^2 ячейками, где $L = Z^n$. Этот квадрат разбивается на Z^2 идентичных квадратов. Из Z^2 полученных квадратов некоторые остаются неизменными. Какие именно квадраты остаются неизменными, зависит от конкретной модели. Каждый из этих квадратов содержит Z^{n-1} элементов в грани. Далее квадраты, не принадлежащие множеству неизменных, подвергаются аналогичной процедуре разбиения на более мелкие. На каждом шаге определяется множество квадратов $S_{\mathrm{i},L}, \mathrm{i} = 0, \dots, \mathrm{n} - 1$, которые подлежат дальнейшему разбиению. Множество квадратов, лежащих в $S_{n-1,L}$, является неделимым и обозначается как $\hat{S}_{\mathrm{n},L}$. Аналогично на каждом шаге множество неделящихся квадратов обозначается как $\hat{S}_{\mathrm{r},L}, \mathrm{r} = 1, \dots, \mathrm{n}$. Множество всех неделимых квадратов $\hat{S}_{\mathrm{r},L}, \mathrm{r} = 1, \dots, \mathrm{n}$ образует W_L. Каждый квадрат, находящийся в данном множестве, называется ячейкой. Площадь, занимаемая каждой ячейкой, считается как число квадратов минимального размера в грани данной ячейки, возведённое во вторую степень [1].

Критический предел H_i определяется как число соседей данной ячейки. Соседом называется ячейка, граница с которой состоит более чем из 1 точки. Для определения числа соседей у граничных ячеек необходимо представить карту решётки в виде тора, соединив противоположные границы квадрата друг с другом.

Физическая характеристика каждой ячейки системы определяется количеством «песчинок», содержащихся в данной ячейке. Пусть h_i – число песчинок в i-ой ячейке, где $i = 1, \dots, |W_L|$ – порядковый номер ячейки. Тогда последовательность $\{h_i\}_{i=1}^{|W_L|}$ определяет конфигурацию решётки. Ячейка i называется стабильной, если число песчинок h_i, содержащихся в этой ячейке, меньше, чем критический предел H_i данной ячейки. Конфигурация решётки называется стабильной, если неравенство $h_i < H_i$ выполняется для всех $i = 1, \dots, |\Omega_L|$.

Процесс функционирования модели заключается в следующем [3]: в каждый момент времени из множества Ω_L выбирается случайная ячейка. Вероятность выбора каждой конкретной ячейки прямо пропорциональна площади данной ячейки. В выбранную ячейку добавляется одна песчинка. Если после добавления песчинки конфигурация остаётся стабильной, процессе переходит в следующий момент времени. В противном случае, выполняется следующее:

1. Для k-ой нестабильной ячейки определяется множество $N(k)$ соседей данной ячейки;
2. Число песчинок в ячейке уменьшается на критический предел данной ячейки: $h_k \to h_k - H_k$;
3. Число песчинок в ячейках, принадлежащих множеству $N(k)$, увеличивается на единицу: $h_j \to h_j + 1, j \in N(k)$.

Зафиксируем решётку с гранью длины L. Процесс перекладывания песчинок в каждый момент времени называется лавиной. Размер события определяется как число песчинок, перемещённых в соседние клетки в процессе лавины, причём каждая ячейка считается с учётом кратности. Обозначим вероятность события размера s как $f(s, \mathrm{L})$. Вероятности всех возможных событий для заданной системы являются основной характеристикой функционирования системы.

Рассматривается решётка с длиной грани, равной 81 ячейке. В данном примере решётка определяется следующим образом: не подлежат разбиению 4 элемента по центру рёбер. Общий вид решётки в таком случае будет следующим:

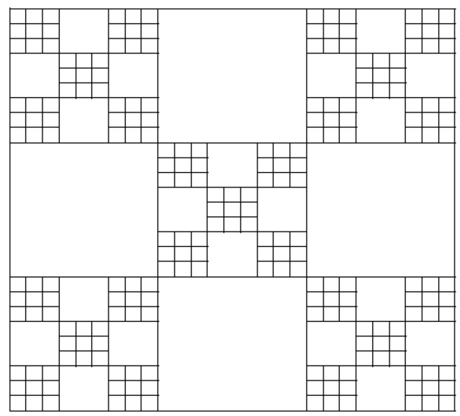

Рисунок 1. Решётка №1, образец модели

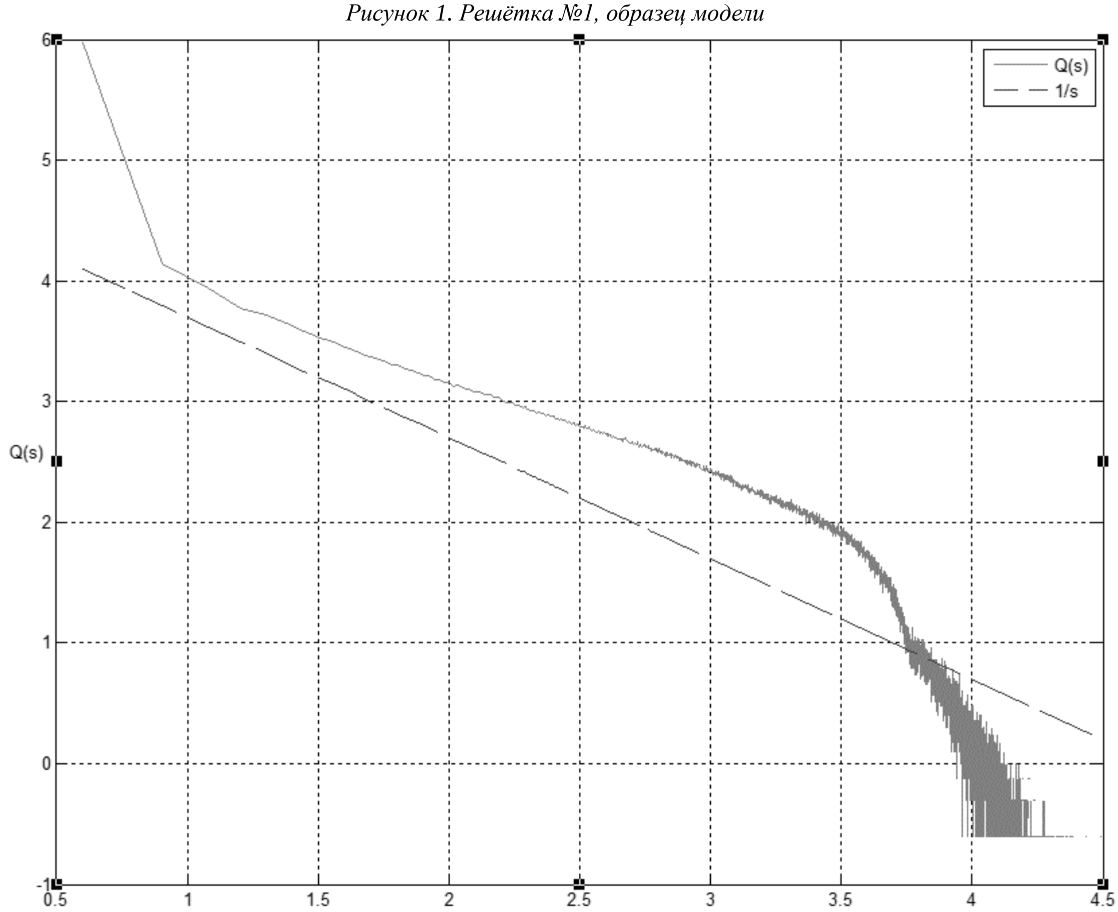

Рисунок 2. График частот Q(s)

Для анализа результатов, получаемых на данной модели, построим график следующей величины:

$$Q(s) = 0.25N\big(f(s) + f(s-1) + f(s-2) + f(s-3)\big),$$

где N – число добавленных к модели песчинок, а $s = 4k + 3$. Для более явного сравнения со степенным законом построим также на графике функцию 1/s.

Основываясь на том факте, что примерный наклон графика Q(s) составляет –0.91468, можно предположить, что $f(s) \sim x^{-0.91468}$.

Таким образом, в данной работе была рассмотрена модель самоорганизованной критичности. Основным выводом работы является подтверждение гипотезы о степенном распределении частот событий данной модели. Также было выявлено, что на наклон прямой (при логарифмированных осях) влияние оказывает не только число клеток, не подлежащих делению, но и общая структура решётки. В качестве параметра, характеризующего общую структуру решётки, можно выделить математическое ожидание длины случайного блуждания для данной конфигурации.

Литература

1. *Shapoval A. B.* The BTW mechanism on a self–similar image of a square: A path to unexpected exponents / A.B. Shapoval, M. G. Shnirman // Physica A. – 2012 – Volume 391 – pages 15 – 20.
2. *Dhar D.* Theoretical studies of self–organized criticality / Deepak Dhar // Physica A. – 2006 – Volume 369 – pages 29 – 70.
3. *Bak P.* Self–Organized Criticality: An Explanation of 1/f Noise / P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld // Physical Review Letters. – 1987 – Volume 59 – pages 381 – 384.