О расширениях $p-$секвенциальных пространств

On extension of $p-$sequential spaces

Болжиев Б.А.

Болжиев Бурас Асанбекович/Boljiev Buras Asanbekovich-

кандидат физико-математических наук

Институт теоретической и прикладной математики НАН КР

А*ннотация*: В данной статье изучаются свойства $p-$секвенциальных пространств для произвольного свободного ультрафильтра p на множестве мощности τ.

***Abstarct*:** In the paper for any nontrivial ultrafilter p on the set of power τ the properties of a $p-$sequential spaces have been studied.

Ключевые слова: *$p-$секвенциальное пространство, $p-$компактное пространство, тихоновское пространство, ультрафильтр*

Keywords: *$p-$sequential spaces, $p-$compact space,Tychonoff space, ultrafilter*

Одним из важных понятий в общей топологии является понятие секвенциального пространства и актуальной остаётся задача, касающаяся его различных обобщений. Одно из важных таких обобщений принадлежит А.П. Комбарову [2]. В этой работе он определяет различные виды $P-$секвенциальности, а именно, сильно (слабо) $P-$секвенциальные пространства, где $P-$произвольный набор ультрафильтров, определенных на счётном множестве. Позже понятия сильно (слабо) $P-$секвенциальных пространств и радиального пространства позволили Л.Кочинасу ввести и изучить $sP-$(псевдо)-радиальные, $wP-$(псевдо)-радиальные, $vwP-$(псевдо)-радиальные , а также пространства соответствующего им типа компактности, точнее говоря, $sP-$компактные и $wP-$компактные пространства, где $P\subset\beta\tau\setminus\tau$ для любого дискретного пространства мощности τ. Здесь $\beta\tau\setminus\tau$, являющееся Стоун-Чеховским наростом дискретного пространства мощности τ, ассоциируется со множеством всех свободных ультрафильтров на τ.

В данной работе мы будем рассматривать случай $P=\{p\}$, т.е. случай, когда P состоит только из одного ультрафильтра, скажем, p на τ и естественно считать, что элементы ультрафильтра p могут иметь мощность, меньшую чем τ. В дальнейшем, каждый бесконечный кардинал будет ассоциироваться с начальным ординалом той же мощности. Как было отмечено ранее, Л.Кочинас определил $sP-$(псевдо)-радиальные, $wP-$(псевдо)-радиальные, $vwP-$(псевдо)-радиальные пространства, которые все совпадают друг с другом в случае, когда P состоит из одного ультрафильтра. Однако, мы предпочитаем здесь называть такие пространства $p-$севенциальными пространствами, которые были определены А.Комбаровым в [2] для случая счётного τ. Пусть $p\in\beta\tau\setminus\tau$ и $(x_\alpha:\alpha<\tau)$ является $\tau-$последовательностью в топологическом пространстве (X,σ), тогда, следуя В.Саксу [1], назовём точку $x\in X$ $p-$предельной точкой $\tau-$последовательности $(x_\alpha:\alpha<\tau)$, обозначаемое как $x=p-\lim x_\alpha$, если для любой окрестности W точки x выполняется $\{\alpha:x_\alpha\in W\}\in p$. Мы также можем говорить в таком случае, что $\tau-$последовательность $(x_\alpha:\alpha<\tau)$ $p-$сходится к точке x или обладает $p-$предельной точкой x.

Для каждого $A\subset X$ определим следующее множество $p(A)=A\cup\{x\in X:$что для некоторой $\tau-$последовательности $(x_\alpha:\alpha<\tau)\subset A$ выполнено: $x=p-\lim x_\alpha\}$.

Определение 1. Топологическое пространство (X,σ) называется $p-$секвенциальным, если $p(A)=[A]$ для любого $A\subset X$.

Можно определить $p-$секвенциальность следующим эквивалентным способом: топологическое пространство (X,σ) называется $p-$секвенциальным, если для любого незамкнутого $A\subset X$ найдутся точка $x\notin A$ и некоторая $\tau-$последовательность $(x_\alpha:\alpha<\tau)\subset A$, такие что $x=p-\lim x_\alpha$.

Определение 2 [1]. Топологическое пространство (X,σ) называется $p-$компактным, если каждая $\tau-$последовательность $(x_\alpha:\alpha<\tau)$ обладает $p-$предельной точкой.

В статье [1] было доказано, что каждое компактное пространство является $p-$компактным и что класс $p-$компактных пространств является мультипликативным и наследуется по замкнутым подмножествам.

Определение 3. Подмножество $O \subset X$ в топологическом пространстве (X, σ) называется $p-$секвенциально открытым, если из того, что $x \in O$ и $x = p - \lim x_\alpha$ для некоторой $\tau-$последовательности $(x_\alpha : \alpha < \tau)$ следует, что $\{\alpha : x_\alpha \in O\} \in p$.

Непосредственно из определения 3 следует, что конечное пересечение $p-$секвенциально открытых множеств является $p-$секвенциально открытым и объединение любого числа $p-$секвенциально открытых множеств снова является $p-$секвенциально открытым можно заключить, что множество σ_p, состоящее из всех $p-$секвенциально открытых множеств, образует топологию на X. Учитывая также, что любое открытое множество является $p-$секвенциально открытым, мы приходим к следующему результату.

Предложение 1. (X, σ_p) является топологическим пространством и $\sigma \subset \sigma_p$

Определение 4. Подмножество $A \subset X$ в топологическом пространстве (X, σ) называется $p-$секвенциально замкнутым, если и только если, $A = p(A)$.

Предложение 2. Подмножество $A \subset X$ в топологическом пространстве (X, σ) является $p-$секвенциально замкнутым тогда и только тогда, когда $X \setminus A$ является $p-$секвенциально открытым.

Доказательство. Пусть A является $p-$секвенциально замкнутым и $x \notin A$, тогда $x \in O = X \setminus A$. Предположим, что $x = p - \lim x_\alpha$ для некоторой $\tau-$последовательности $(x_\alpha : \alpha < \tau)$. Так как p является ультрафильтром, тогда найдётся $W \in p$ такое, что $(x_\alpha : \alpha \in W) \subset O$, иначе $\{\alpha : x_\alpha \in A\} \in p$, что в свою очередь означало бы, что $x \in A$. Поэтому O является $p-$секвенциально открытым.

Пусть теперь O является $p-$секвенциально открытым и $x = p - \lim x_\alpha$ для некоторого x и некоторой $\tau-$последовательности $(x_\alpha : \alpha < \tau) \subset \mathrm{A}$. Предполагая $x \in O$, получим $\{\alpha : x_\alpha \in O\} \in p$ и тогда $(x_\alpha : \alpha < \tau) \not\subset \mathrm{A}$, что противоречит нашему предположению. Следовательно, A является $p-$секвенциально замкнутым множеством.

Предложение 3. Топологическое пространство (X,σ) является $p-$секвенциальным тогда и только тогда, когда $\sigma=\sigma_p$.

Доказательство. Необходимость. Пусть O не является открытым множеством в (X,σ). Тогда найдутся $x\in O$ и некоторая $\tau-$последовательности $(x_\alpha:\alpha<\tau)\subset X\setminus O$ такие, что $x=p-\lim x_\alpha$. Ясно, что O не является $p-$секвенциально открытым множеством. Итак, $\sigma=\sigma_p$.

Достаточность. Пусть теперь $\sigma=\sigma_p$, т.е. каждое $p-$секвенциально открытое множество является открытым. Если A не является замкнутым, тогда $O=X\setminus A$ не является открытым и, следовательно, не является $p-$секвенциально открытым множеством, что в свою очередь означает, благодаря Предложению 2, что A не является $p-$секвенциально замкнутым. Поэтому для некоторой точки $x\notin A$ и некоторой $\tau-$последовательности $(x_\alpha:\alpha<\tau)\subset A$ выполнено: $x=p-\lim x_\alpha$, что и доказывает $p-$секвенциальность пространства (X,σ).

Предложение 4. Пусть (X,σ) является $p-$секвенциальным пространством и (Y,δ) является её расширением. Тогда $\delta_p|_X=\sigma$.

Доказательство. Пусть $O\in\delta_p|_X$, тогда $O=G\cap X$ для некоторого $p-$секвенциально открытого в (Y,δ) множества G. Так как X плотно в Y, то из того что $x=p-\lim x_\alpha$ для $x\in O$ и некоторой $\tau-$последовательности $(x_\alpha:\alpha<\tau)\subset X$ следует, что $x=p-\lim x_\alpha$ в (Y,δ) тоже. Теперь легко найти $W\in p$ такое, что $(x_\alpha:\alpha\in W)\subset G$, откуда немедленно следует $(x_\alpha:\alpha\in W)\subset O$, что означат $p-$секвенциальную открытость O в пространстве (X,σ). Из Предложения 3 получаем, что $O\in\delta$.

В обратную сторону, пусть $O\in\delta$. Тогда найдётся $H\in\delta$ для которого $H\cap X=O$. Учитывая, что $H\in\delta_p$, получаем: $\sigma\subset\delta_p|_X$, что и завершает доказательство.

Теорема 1. Пространство (X,σ_p) является $p-$секвенциальным для любого топологического пространства (X,σ).

Доказательство. Пусть A не является замкнутым подмножеством пространства (X,σ_p), что в силу Предложения 2 означает, что A не является $p-$секвенциально замкнутым в (X,σ). Поэтому найдутся $x\notin A$ и некоторая $\tau-$последовательности $(x_\alpha:\alpha<\tau)\subset A$ такие, что $x=p-\lim x_\alpha$ в (X,σ). Если O является открытой окрестностью точки x в (X,σ_p), тогда O является и $p-$секвенциально открытым в (X,σ), что в свою очередь влечёт: $x=p-\lim x_\alpha$ в (X,σ_p). Следовательно, (X,σ_p) является $p-$секвенциальным пространством.

Следствие 1. Пусть (X,σ) будет $p-$компактным пространством. Тогда (X,σ_p) является $p-$компактным $p-$секвенциальным пространством.

Доказательство. Нам остаётся доказать только $p-$компактность пространства (X,σ_p). Но это немедленно следует из $p-$компактности пространства (X,σ) и

Теорема 2. Каждое тихоновское $p-$секвенциальное пространство обладает $p-$компактным $p-$секвенциальным расширением.

Доказательство. Пусть (Y,δ) является произвольным компактным расширением тихоновского $p-$секвенциального пространства (X,σ). Так как каждое компактное пространство является $p-$компактным [1], тогда из Предложения 4 и Следствия 1 следует, что (X,σ) является подпространством $p-$компактного $p-$секвенциального пространства (Y,δ_p). Очевидно, что $p-$компактность и $p-$секвенциальность наследуется по замкнутым множествам, поэтому если мы возьмём замыкание X в пространстве (Y,δ_p), то мы получим желаемое расширение.

Список литературы:

1. Saks V. Ultrafilters invariant in topological spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 1978. V.241., 79-97.
2. Комбаров А.П. Об одной теорем Стоуна. ДАН СССР 270 (1983), 38-40.