МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ СХЕМЫ ВОЗДУШНОГО ПОТОКА ЧЕРЕЗ ФИЛЬТРАЦИОННОЕ УСТРОЙСТВО

Худайбердиев О.Ж.[1], Рахматов С.Х.[2], Карабекян С.Х.[3], Жумабоев Э.О.[4]
Email: Khudayberdiev6117@scientifictext.ru

[1]Худайбердиев Ойбек Жумабоевич – старший преподаватель;
[2]Рахматов Сафарбой Худайбердиевич – доцент;
[3]Карабекян Светлана Хамдамовна – ассистент;
[4]Жумабоев Элбек Ойбек угли – ассистент,
кафедра высшей математики и информационных технологий,
Навоийский государственный горный институт,
г. Навои, Республика Узбекистан

Аннотация: *одной из важнейших задач современного производства является очистка запыленных воздушных потоков в фильтрационном устройстве компрессоров экскаваторов и других машин горной промышленности. Перспективным направлением является замена низкоэффективных пылеуловителей на более совершенные фильтры, которые обеспечивают эффективность очистки от пыли при небольшом гидравлическом сопротивлении. В данной статье исследован процесс протекания воздушного потока по фильтрационному устройству и создана математическая модель этого процесса. Изучены характеристики векторного поля, образованного вектором скорости воздушного потока, и проведены расчеты для каждой составляющей.*
Ключевые слова: *фильтрационное устройство, воздушный поток, вектор скорости, векторное поле, градиент, поток, циркуляция.*

MATHEMATICAL MODELING OF THE CALCULATION OF THE AIR FLOW SCHEME THROUGH THE FILTRATION DEVICE

Khudayberdiev O.J.[1], Rakhmatov S.Kh.[2], Karabekyan S.Kh.[3], Jumaboev E.O.[4]

[1]Khudayberdiev Oybek Jumaboyevich – Senior Lecturer;
[2]Rakhmatov Safarboy Khudoyberdievich - Assistant Professor;
[3]Karabekyan Svetlana Khamdamovna – Assistant;
[4]Jumaboev Elbek Oybek ugli – Assistant,
DEPARTMENT OF HIGHER MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGIES,
NAVOI STATE MINING INSTITUTE,
NAVOI, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: *one of the most important tasks of modern production is the cleaning of dusty air flows in the filtration device of compressors of excavators and other machines mining industry. A promising direction is the replacement of low-efficiency dust collectors with more advanced filters that ensure the efficiency of dust removal with a small hydraulic resistance. In this article, the process of air flow through the filtration device is investigated and a mathematical model of this process is created. The characteristics of the vector field formed by the air flow velocity vector are studied and calculations are performed for each component.*
Keywords: *filtration device, air flow, velocity vector, vector field, gradient, flow, circulation.*

УДК 519.6

Математическая модель вычисления схемы воздушного потока через устройства фильтрации основывается на уравнение движения вязкой жидкости (уравнение Навье-Стокса), которое рассматривается как уравнение неразрывности, выражающее закон сохранения массы

$$div(\rho \cdot \vec{\omega}) = 0, \qquad (1)$$

где ρ – плотность кг/м^3, $\vec{\omega}$ – вектор скорости, м/с. Уравнение неразрывности в декартовой (прямоугольной) системе координат имеет следующий вид:

$$\frac{\partial(\rho \cdot \omega_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot \omega_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot \omega_z)}{\partial z} = 0,$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора скорости на прямоугольной системе координат соответственно.

Из курса высшей математики [1] известно, что воздушный поток, проходящий через фильтрационное устройство, создаёт некоторое поле, которое образовано вектором скорости ϖ в определенную область

G, являющейся фильтрационным устройством. Математическим ядром теории поля являются такие понятия, как градиент, поток, циркуляция, потенциал, дивергенция, ротор и т.д. [1, 2].

Используя эти понятия для поля, создаваемой воздушным потоком в фильтрационном устройстве, образованном вектором скорости $\vec{\omega}$, проведём полный сравнительный анализ изучаемых однослойных и двухслойных фильтрационных устройств. В этих целях вектор скорости $\vec{\omega}$ рассмотрим как

$$\vec{\omega} = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)\bar{k},$$

где функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ – являются проекциями вектора $\vec{\omega}$ на соответствующие оси прямоугольной системы координат Ox, Oy, Oz.

Теперь начнем вычисление векторной линии, потока, градиента, дивергенции, циркуляции и ротора воздушного потока фильтрационного устройства. При этом за пространственную область *V* берем корпус фильтрационного устройства. Поверхность *S* фильтрационного устройства можно брать как цилиндрическую, т.к., она является цилиндром. Далее, остальные все величины берем как данные цилиндра (высоту *H*, радиус *R*) [3-8].

Тогда основание цилиндра будет равно $S_{ос} = \pi R^2$, боковая поверхность $S_{бок} = 2\pi RH$, объем $V = \pi R^2 H$.

Учитывая вышесказанное, определим векторную скорость $\vec{\omega}$ воздушного потока. При этом предполагаем, что фильтрационное устройство расположено на плоскости Oxy вертикально. Воздушное отверстие фильтрационного устройства находится посередине корпуса, и воздух поступает параллельно плоскости Oxy. Тогда по предположению векторная скорость имеет следующий вид:

$$\vec{\omega} = x\bar{i} + y\bar{j} + 0\bar{k} = x\bar{i} + y\bar{j},$$

где x, y, z – координаты произвольной точки $M(x;y;z)$ цилиндра.

После того, как определен вектор, образующий векторное поле, можно вычислить:

1) Векторную линию векторного поля по приведенному уравнению

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)},$$

Здесь $P(x,y,z) = x$, $Q(x,y,z) = y$, $R(x,y,z) = 0$.

Получим

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x} \\ \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{0} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x} \\ dz = 0 \end{cases}.$$

Интегрируя данную систему имеем:

$$\begin{cases} \int \dfrac{dy}{y} = \int \dfrac{dx}{x} + \tilde{c}_1 \\ \int dz = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln y = \ln x + \ln c_1 \\ z = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln y = \ln c_1 x \\ z = c_2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = c_1 x \\ z = c_2 \end{cases}$$

где, для простоты дальнейшего описания в взято $\tilde{c}_1 = \ln c_1$. Из полученных равенств следует, что векторные линии являются прямыми $y = c_1 x$, параллельными плоскости Oxy и перпендикулярными оси Oz.

2) Воздушный поток векторного поля по уравнению

$$K = \iint_S \vec{\omega} \cdot \bar{n} dS$$

где S – поверхность, стягивающая область G, $\bar{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности S, т.е.

$$\bar{n} = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \cos\beta \cdot \bar{j} + \cos\gamma \cdot \bar{k}$$

здесь α, β, γ – углы, образованные нормалью с осями координат.

Здесь нужно уточнить что, если рассмотреть векторное поле ϖ как поле скорости текущего воздуха через замкнутую поверхность, то величина потока K даёт разность между количеством воздуха, вытекающем из области G и количеством воздуха, втекающем в неё за единицу времени [1].

В этом случае поверхность S берем как боковую поверхность корпуса фильтрационного устройства, которая определена $S_{бок} = 2\pi RH$.

$$K = \iint_S \vec{\omega}\bar{n} ds = \iint_S (x\cos\alpha + y\sin\alpha) dxdy$$

где

$$\vec{\omega} = x\bar{i} + y\bar{j}, \ \bar{n} = \bar{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Здесь $\cos\beta = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$, $\gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\gamma = 0$.

Т.к. основание цилиндра есть окружность $x^2 + y^2 = R^2$, то

$$\iint_S (x\cos\alpha + y\sin\alpha) dxdy = \int_0^R \int_0^R (x\cos\alpha + y\sin\alpha) dxdy =$$

$$= \int_0^R (xy\cos\alpha + \frac{y^2}{2}\sin\alpha)\Big|_0^R dx = \int_0^R (xR\cos\alpha + \frac{R^2}{2}\sin\alpha) dx =$$

$$= (\frac{x^2}{2} R\cos\alpha + x\frac{R^2}{2}\sin\alpha)\Big|_0^R = \frac{R^3}{2}\cos\alpha + \frac{R^3}{2}\sin\alpha = \frac{R^3}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Не нарушая общности, для простоты вычисления, можно положить $\alpha = \frac{\pi}{4}$, хотя $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$K = \frac{R^3}{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}) = \frac{R^3}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{R^3}{\sqrt{2}} \text{ м/с.}$$

Это означает, что воздушный поток в корпус фильтрационного устройства поступает со скоростью $\frac{R^3}{\sqrt{2}}$ м/с.

3) Градиент векторного поля, образованного вектором $\vec{\omega} = x\bar{i} + y\bar{j}$, будет иметь вид

$$grad\vec{\omega} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\omega}{\partial z}\bar{k} = 1 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k} = \bar{i} + \bar{j}.$$

4) Далее находим дивергенцию векторного поля воздушного потока, образованного вектором скорости $\vec{\omega} = x\bar{i} + y\bar{j}$

$$div\vec{\omega} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

где $P(x, y, z) = x$, $Q(x, y, z) = y$, $R(x, y, z) = 0$.

Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1, \ \frac{\partial Q}{\partial y} = 1, \ \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

Отсюда

$$div\vec{\omega}=1+1+0=2.$$

Это величина указывает на распределение воздушного потока в фильтрационном устройстве, который распределяется с удвоенной скоростью.

5) Ещё одной величиной векторного поля, созданного вектором $\vec{\omega}$, является циркуляция. Её определим по формуле

$$C=\oint_L \vec{\omega}\cdot d\bar{r},$$

где L – замкнутый контур, который состоит из окружности $x^2+y^2=R^2$.

Из формулы для циркуляции получим

$$C=\oint_L \overline{\omega}_r dl=\oint_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\oint_L Pdx+Qdy.$$

Из курса высшей математики известно, что по теореме Остроградского-Гаусса [1]

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy.$$

На основании этого получим:

$$C=\oint_L xdx+ydy=\iint_D (0-0)dxdy=0,$$

где D – область интегрирования, состоящая из круга $x^2+y^2\le R^2$.

Т.к. $C=0,$ то в фильтрационном устройстве не происходит циркуляции. Этот процесс объясняется тем, что воздушный поток, поступающий из одного отверстия фильтрационного устройства, втекает в другое отверстие, т.е. воздух в фильтрационном устройстве поступает извне и, очищенный фильтром, высасывается в трубу, находящуюся по центру корпуса и поэтому не происходит циркуляции воздуха.

6) Теперь определим ротор (вихрь) векторного поля, образованного вектором $\vec{\omega}=x\bar{i}+y\bar{j}$, по формуле

$$rot\overline{\omega}=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\bar{i}+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\bar{j}+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\bar{k}.$$

Для нахождение ротора имеем:

$$P(x,y,z)=x,\ Q(x,y,z)=y,\ R(x,y,z)=0,$$

тогда

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial Q}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial z}=0,$$

Следовательно

$$rot\overline{\omega}=(0-0)\bar{i}+(0-0)\bar{j}+(0-0)\bar{k}=0.$$

Равенство нулю ротора воздушного потока означает, что этот поток не создает вихря. Из этого следует, что воздушный поток является постоянным, а векторное поле потенциальным (или безвихревым).

Таким образом, нами определены все характеристики векторного поля, образованным вектором скорости $\vec{\omega}$ воздушного потока. По полученным выше данным имеем

$$div\vec{\omega}=2,\ C=0,\ rot\vec{\omega}=0,\ K=\frac{R^3}{\sqrt{2}}\text{ м/с.}$$

Эти данные говорят о том, что:

– дивергенция (распределение) воздушного потока внутри устройства с объёмом $V=\pi R^2H$ происходит с удвоенной силой (в отличие от вне корпуса фильтрационного устройства);

– циркуляция внутри фильтрационного устройства отсутствует;

– воздушный поток (векторное поле) является потенциальным (безвихревым);

– векторные линии воздушного потока являются прямые $y=c_1x$, протекающие на высоте $z=c_2$ фильтрационного устройства.

Список литературы / References

1. *Письменный Д.Т.* «Конспект лекций по высшей математике: полный курс». М.: Айрис-пресс, 2009. 608 с.
2. *Бодунов М.А. и др.* Интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных. Теория поля. Методические указания. МГТУ «МАМИ». Москва, 2005.
3. *Коберниченко В.Г.* Расчет и проектирование цифровых фильтров. Учебно-методическое пособие. Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2013. 64 с.
4. *Виноградов В.В.* Повышение эффективности щелевых фильтров для очистки газов от промышленной пыли. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Иркутск, 2018.
5. *Худайбердиев О.Ж., Карабекян С.Х., Норов Г.М., Жумабоев Э.О.* Математическое моделирование процесса гололедообразования и вычисление массы льда на линиях электрических проводов. Научно-технический и производственный журнал “Горный вестник Узбекистана”. № 2 (85). Навои. Апрель-июнь, 2021. Стр. 88-90.