ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЁМА ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЁМКОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕГРАЦИИ ДИСЦИПЛИН

Тожиев И.И.[1], Карабекян С.Х.[2], Баракаев А.М.[3]
Email: Tojiev696@scientifictext.ru

[1]Тожиев Илхом Ибраимович – доцент;
[2]Карабекян Светлана Хамдамовна – ассистент;
[3]Баракаев Азамат Мансурович – ассистент,
кафедра высшей математики и информационных технологий,
Навоийский государственный горный институт,
г. Навои, Республика Узбекистан

Аннотация: *развитие науки требует решения математической модели какого-либо процесса. В данной статье рассматривается определение количества жидкости в цилиндрической ёмкости, причем основания этого цилиндра могут быть круглыми или эллиптическими и вертикальными.*
При расчете использовались понятия из математики, физики и информатики, а также декартова координатная система, элементы интегрального исчисления и физические понятия. Затем, после внесения всех необходимых параметров, показан расчет количества жидкости в приложении MS Excel.
Ключевые слова: *цилиндр, эллиптический цилиндр, определенный интеграл, масса жидкости, плотность жидкости, приложение MS Excel.*

DETERMINATION OF LIQUID VOLUME IN A CYLINDRICAL CONTAINER USING DISCIPLINE INTEGRATION

Tojiev I.I.[1], Karabekyan S.H.[2], Barakayev A.M.[3]

[1]Tojiev Ilkhom Ibraimovich – Docent;
[2]Karabekyan Svetlana Khamdamovna – Assistant;
[3]Barakayev Azamat Mansurovich – Assistant,
DEPARTMENT OF HIGHER MATH AND INFORMATION TECHNOLOGY,
NAVOI STATE MINING INSTITUTE,
NAVOI, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: *the development of science requires the solution of a mathematical model of a process. This article discusses the determination of the amount of liquid in a cylindrical container, and the bases of this cylinder can be round or elliptical and vertical.*
The calculation used concepts from mathematics, physics and computer science, as well as a Cartesian coordinate system, elements of integral calculus and physical concepts. Then, after entering all the necessary parameters, the calculation of the amount of liquid in the MS Excel application is shown.
Keywords: *cylinder, elliptical cylinder, definite integral, mass of liquid, density of liquid, MS Excel application.*

УДК 378.1

В этой статье рассматривается определение количества жидкости в цилиндрической ёмкости, причем основания этого цилиндра могут быть круглыми или эллиптическими и вертикальными. При расчете использовались понятия из математики, физики и информатики, а также декартова координатная система, элементы интегрального исчисления и физические понятия. Окончательные формулы вывода введены в приложение MS Excel и при внесении заданных параметров возможно определить количество жидкости в ёмкости.

Известно, что ёмкости водных или топливных транспортных средств, помимо емкостей для хранения топлива, представляют собой цилиндры круглой или эллиптической формы (рис. 1а, б).

Пусть нам заданы следующие задачи:

Задача 1. Основания цилиндра имеют форму круга и вертикально. Радиус равен R, образующая L (см. рис.1а). Определить количество жидкости в ёмкости, если расстояние между нижним и верхним уровнями топлива в цилиндре равно h, а плотность жидкости равна ρ.

Задача 2. Основания цилиндра имеют форму эллипса и вертикально. Вертикальная полуось эллипса – b, горизонтальная полуось – a, образующая – L (см. рис.1b). Определить количество жидкости в ёмкости, если расстояние между нижним и верхним уровнями жидкости в ёмкости равно h, а плотность топлива равна ρ.

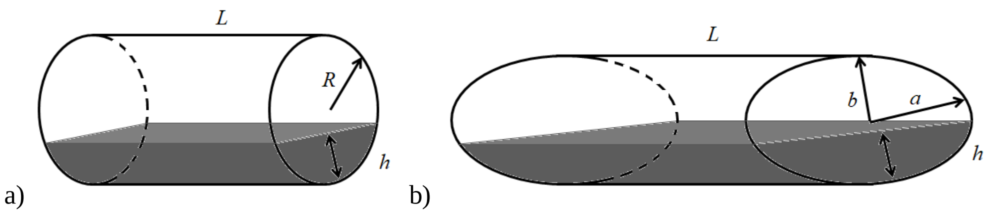

Рис. 1. Цилиндры с круглыми и эллиптическими основаниями

Решение задачи 1.

Чтобы решить задачу нам необходимо найти сегмент круга. Для этого проделаем следующее. Разместим основание цилиндра на рис.1a в декартовой координатной плоскости как на рис.2a. Очевидно, что фигуры ABC и ABD симметричны и равны по площади. Следовательно, найдя площадь фигуры ABC и умножив ее на два, мы получим площадь сегмента. Для того чтобы найти площадь этой фигуры воспользуемся определенным интегралом. В качестве функции возьмём ту часть круга, которая находится выше оси Ox с центром в начале координат O и радиусом R, то есть $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. За нижнюю и верхнюю границы определенного интеграла возьмём $-R$ (абсциссу точки A) и $h - R$ (абсциссу точки B) соответственно:

$S_{ACBD} = 2\int_{-R}^{h-R} \sqrt{R^2 - x^2}dx.$

При вычислении указанного выше интеграла введём следующую замену [1]:

$x = Rcost, dx = -Rsintdt, t = arccos\frac{x}{R}, dx = Rsintdt$

Нижний предел: $t = arccos\frac{-R}{R} = \arccos(-1) = \pi,$

верхний предел: $t = arccos\frac{h-R}{R}.$

В результате получим

$$S_{ACBD} = -2\int_{\pi}^{arccos\frac{h-R}{R}} \sqrt{R^2 - (Rcost)^2} \cdot Rsintdt = -2R^2 \int_{\pi}^{arccos\frac{h-R}{R}} sin^2tdt =$$

$$= 2R^2 \int_{\pi}^{arccos\frac{h-R}{R}} \frac{cos2t - 1}{2}dt = \left(R^2 \cdot \frac{sin2t}{2} - R^2t\right)\Big|_{\pi}^{arccos\frac{h-R}{R}} =$$

$$= R^2 \cdot \frac{sin\left(2arccos\frac{h-R}{R}\right)}{2} - R^2 arccos\frac{h-R}{R} - R^2 \cdot \frac{\sin 2\pi}{2} + \pi R^2 =$$

$$= R^2 \cdot \frac{2sin\left(arccos\frac{h-R}{R}\right) cos\left(arccos\frac{h-R}{R}\right)}{2} - R^2\left(\frac{\pi}{2} - arcsin\frac{h-R}{R}\right) + \pi R^2 =$$

$$= R^2 \cdot arcsin\frac{h-R}{R} + (h - R) \cdot \sqrt{2hR - h^2} + \frac{\pi R^2}{2}.$$

Итак, площадь сегмента $ACBD$ определяется формулой

$$S_{ACBD} = R^2 \cdot arcsin\frac{h-R}{R} + (h - R) \cdot \sqrt{2hR - h^2} + \frac{\pi R^2}{2}$$

Если обозначить количество жидкости в ёмкости через m, то ее количество определяется по следующей формуле [2]:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot S_{ACBD} \cdot L,$$

где V – объём, занимаемый жидкостью в ёмкости.

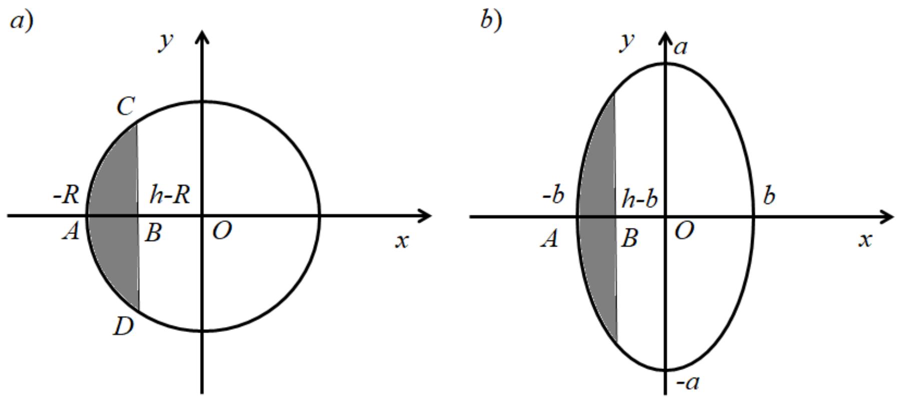

Рис. 2. Основания цилиндров в декартовой координатной плоскости

Решение задачи 2.

Чтобы решить задачу нам необходимо найти сегмент эллипса. Для этого проделаем следующее. Разместим основание цилиндра на рис.1b в декартовой координатной плоскости как на рис.2b. Очевидно, что фигуры ABC и ABD симметричны и равны по площади. Следовательно, найдя площадь фигуры ABC и умножив ее на два, мы получим площадь сегмента. Для нахождения площади этой фигуры воспользуемся определенным интегралом.

В качестве функции возьмём ту часть эллипса, которая находится выше оси *Ox* с центром в начале координат *O*, малой осью a и большой осью b, то есть $y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}$. За нижнюю и верхнюю границы определенного интеграла возьмём $-b$ (абсциссу точки *A*) и $h - b$ (абсциссу точки *B*) соответственно:

$S^*_{ACBD} = \frac{2a}{b}\int_{-b}^{h-b}\sqrt{b^2 - x^2}dx.$

При вычислении указанного выше интеграла введём следующую замену [1]:

$x = bcost, dx = -bsintdt, t = arccos\frac{x}{b}.$

Нижний предел: $t = arccos\frac{-b}{b} = \arccos(-1) = \pi,$

верхний предел: $t = arccos\frac{h-b}{b}.$

В результате получим

$$S^*_{ACBD} = -\frac{2a}{b}\int_{\pi}^{arccos\frac{h-b}{b}}\sqrt{b^2 - (bcost)^2}\cdot bsintdt = -2ab\int_{\pi}^{arccos\frac{h-b}{b}} sin^2tdt =$$

$$= 2ab\int_{\pi}^{arccos\frac{h-b}{b}}\frac{cos2t - 1}{2}dt = ab\left(\frac{sin2t}{2} - t\right)\Big|_{\pi}^{arccos\frac{h-b}{b}} =$$

$$= ab\left(\frac{sin\left(2arccos\dfrac{h-b}{b}\right)}{2} - arccos\frac{h-b}{b} - \frac{\sin 2\pi}{2} + \pi\right) =$$

$$= ab\left(\frac{2sin\left(arccos\dfrac{h-b}{b}\right)cos\left(arccos\dfrac{h-b}{b}\right)}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - arcsin\frac{h-b}{b}\right) + \pi\right) =$$

$$= ab\left(arcsin\frac{h-b}{b} + \frac{h-b}{b^2}\cdot\sqrt{2hb - h^2} + \frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно, площадь сегмента $ACBD$ определяется формулой

$$S^*_{ACBD} = ab\left(arcsin\frac{h-b}{b} + \frac{h-b}{b^2}\cdot\sqrt{2hb - h^2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

Если обозначить количество жидкости в ёмкости через m^*, то ее количество определяется по следующей формуле [2]:

$$m^* = \rho\cdot V = \rho\cdot S^*_{ACBD}\cdot L,$$

где V – объём, занимаемый жидкостью в емкости.

Рассмотрим решение этих задач в MS Excel. Для этого запустив программу, последовательно разместим рис.1a,b на листах 1 и 2 соответственно, как на рисунках 3 и 4.

На листе 1 вводим формулу решения задачи 1. Определяя диапазон A9:B14 обозначим линии таблицы. Затем, вводим в ячейку A9 «Образующая ***L*** (в метрах):»; в ячейку A10 «Радиус ёмкости R (в метрах):»; в ячейку A11 «Высота h жидкости (в метрах):»; в ячейку A12 «плотность жидкости ρ (в кг/м^3):»; в ячейку A13 «РЕЗУЛЬТАТ»; в ячейку A14 «количество жидкости m в ёмкости (в кг):».

Объединим ячейки B13 и B14 и введём в эту объединенную ячейку формулу, определяющую результат задачи 1:

=B9*B12*(B10^2*ASIN((B11-B10)/B10)+(B11-B10)*КОРЕНЬ(2*B11*B10-B11^2)+ПИ()*B10^2/2) (См. рис. 3).

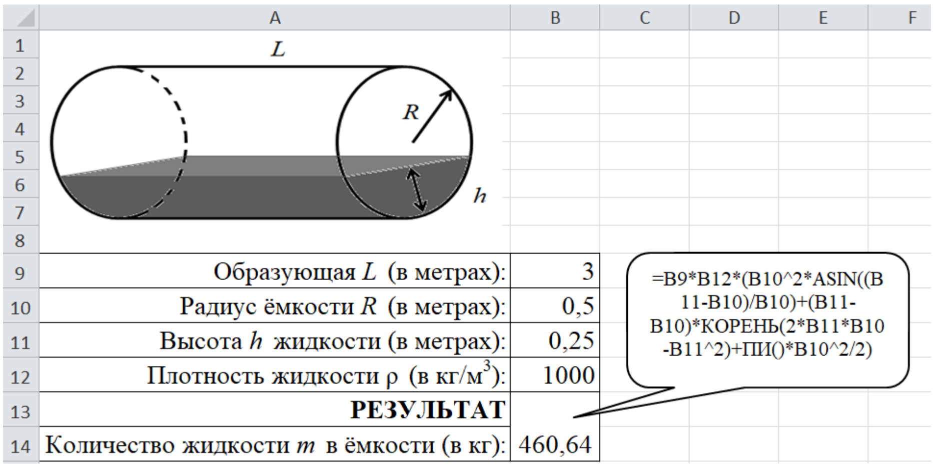

Рис. 3. Решение задачи 1 в MS Excel

На листе 2 вводим формулу решения задачи 2. Определяя диапазон A9:B15 обозначим линии таблицы. Затем, вводим в ячейку A9 «Горизонтальная полуось a (в метрах):»; в ячейку A10 «Вертикальная полуось эллипса b (в метрах):»; в ячейку A11 «Высота h жидкости (в метрах):»; в ячейку A12 «Образующая L (в метрах):»; в ячейку A13 «плотность жидкости ρ (в кг/м^3):»; в ячейку A14 «РЕЗУЛЬТАТ»; в ячейку A15 «количество жидкости m в ёмкости (в кг):».

Объединим ячейки B13 и B14 и введём в эту объединенную ячейку формулу, определяющую результат задачи 2:

=B9*B10*(ASIN((B11-B10)/B10)+(B11-B10)/B10^2*КОРЕНЬ(2*B11*B10-B11^2)+ПИ()/2)*B12*B13 (см. рис. 4).

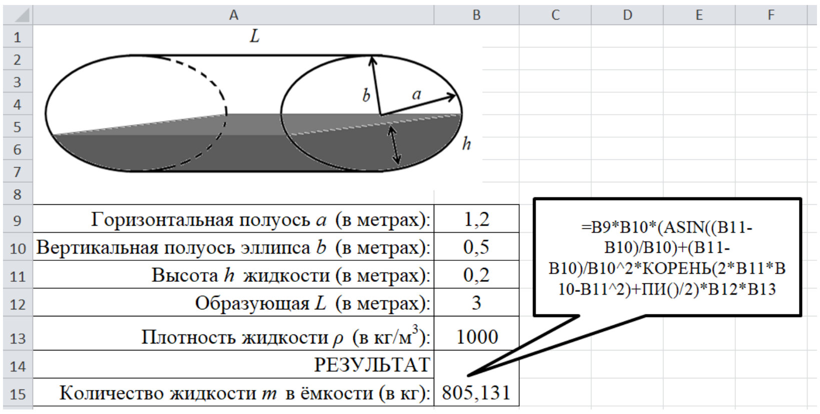

Рис. 4. Решение задачи 2 в MS Excel

При организации преподавания математики и других предметов в учебных заведениях с использованием примеров из реальной жизни и интеграции дисциплин качество уроков становится намного выше, а интерес студентов возрастает. Помимо этого, это также способствует творческому подходу учащихся. Они приобретают достаточно знаний и навыков, чтобы использовать прикладные программы в своей будущей карьере.

Список литературы / References

1. *Кремер Н.Ш.* Высшая математика для экономистов. Учебник. 3-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. 479 с.
2. *Сенчук Ю.Ф.* Математический анализ для инженеров. Часть 1. НТУ, 2003. 408 с.