О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ СУММАМИ ФУРЬЕ

Абилова Ф.В.[1], Селимханов Э.В.[2] Email: Abilova674@scientifictext.ru

[1]Абилова Фарида Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент,
кафедра высшей математики;
[2]Селимханов Эмирхан Валерьевич – магистр,
факультет математики и компьютерных наук,
Дагестанский государственный университет,
г. Махачкала

Аннотация: *в статье даны точные оценки скорости сходимости (наилучших приближений) двойного ряда Фурье по тригонометрической системе на некоторых классах функций двух переменных. Известно, что в теории приближения функций одной переменной (прямые и обратные теоремы) важную роль играет обычный модуль непрерывности. В вопросах, связанных с функциями многих переменных, эту величину можно определить по-разному. Здесь, мы, пользуясь нашими ранее известными идеями, строим обобщенный модуль непрерывности для функций двух переменных, который позволяет установить прямые и обратные теоремы теории приближений, а также дать некоторые точные оценки скорости сходимости (наилучших приближений), на классах функций двух переменных, характеризующихся обобщенным модулем непрерывности, что оправдывает его введение. Так как в отличие от одномерных рядов для двумерных рядов нет естественного способа построения частичных сумм двойного ряда, то сначала мы должны фиксировать некоторый класс функций и затем построить частичные суммы (оптимальные) двойного ряда так, чтобы указанная величина была минимальной, что приводит к «треугольным», «прямоугольным» и другим частичным суммам двойного ряда. Эти идеи привели к исследованию некоторых поперечников рассматриваемых классов функций. В статье мы даем также оценки поперечников этих классов функций.*
Ключевые слова: *обобщенный модуль непрерывности, ряд Фурье, наилучшее приближение, оператор обобщенного сдвига, поперечники.*

ON THE BEST APPROXIMATION OF FUNCTIONS OF TWO VARIABLES BY FOURIER SUMS

Abilova F.V.[1], Selimkhanov E.V.[2]

[1]Abilova Farida Vladimirovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
DEPARTMENT OF HIGHER MATHEMATICS;
[2]Selimkhanov Emirkhan Valerievich – Master of Mathematics,
FACULTY OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE, DAGESTAN STATE UNIVERSITY,
MAKHACHKALA

Abstract: *the article gives exact estimates of the rate of convergence (best approximations) of the double Fourier series in the trigonometric system on some classes of functions of two variables. It is known that in the theory of approximation of functions of one variable (direct and inverse theorems), the usual modulus of continuity plays an important role. In matters related to the functions of many variables, this value can be determined in different ways. Here, using our previously known ideas, we construct a generalized modulus of continuity for functions of two variables, which allows us to establish direct and inverse theorems of approximation theory, as well as give some exact estimates of the rate of convergence (best approximations), on classes of functions of two variables characterized by generalized modulus of continuity, which justifies its introduction. Since, unlike one-dimensional series, for two-dimensional series there is no natural way to construct partial sums of a double series, we must first fix a certain class of functions and then construct partial (optimal) double sums so that the indicated quantity is minimal, which leads to "triangular"," rectangular" and other partial double row sums. These ideas led to the study of some diameters of the considered classes of functions. In the article we also give estimates of the diameters of these classes of functions.*
Keywords: *generalized modulus of continuity, Fourier series, best approximation, generalized shift operator, diameters.*

УДК 517.519

Пусть $L_2 = L_2(Q)$ – пространство суммируемых с квадратом функций $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ двух переменных 2π – периодических по каждой переменной при фиксированной второй и нормой

$$\|f\| = \sqrt{\frac{1}{4\pi^2}\iint_Q |f(x,y)|^2 dxdy}, Q = [-\pi,\pi) \times [-\pi,\pi).$$

Пусть, далее,

$$f(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{nm}(f) e^{i(nx+my)} \qquad (1)$$

$$\left(c_{nm}(f) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_Q f(x,y) e^{-i(nx+my)} dxdy\right)$$

- ряд Фурье функции $f \in L_2$,

$$S_N^{(1)}(f;x,y) = \sum_{0\le|n|+|m|<N} c_{nm}(f) e^{i(nx+my)},$$

$$S_N^{(2)}(f;x,y) = \begin{cases} c_{00}(f), \ N = 1, \\ \sum\limits_{0\le|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|<N} c_{nm}(f) e^{i(nx+my)}, \ N = 2,3,\ldots \end{cases}$$

$$\left(|\bar{k}| = max(1,|k|), k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\right)$$

$$S_N^{(3)}(f;x,y) = \sum_{0\le max\,(|n|,|m|)<N} c_{nm}(f)\, e^{i(nx+my)},$$

$$S_N^{(4)}(f;x,y) = \sum_{0\le n^2+m^2<N^2} c_{nm}(f)\, e^{i(nx+my)}$$

- соответственно «ромбические», «гиперболические», «прямоугольные» и «сферические» частичные суммы ряда (1).

Обозначим через

$$E_N^{(s)}(f) = inf\left\|f - T_N^{(s)}\right\| \ (s = 1,2,3,4)$$

- наилучшее приближение функции $f \in L_2$ тригонометрическими полиномами вида

$$T_N^{(1)}(x,y) = \sum_{0\le|n|+|m|<N} a_{nm} e^{i(nx+my)},$$

$$T_N^{(2)}(x,y) = \begin{cases} a_{00}, \quad N = 1, \\ \sum\limits_{0\le|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|<N} a_{nm}(f) e^{i(nx+my)}, \ N = 2,3,\ldots, \end{cases}$$

где, как и выше, $|\bar{k}| = max(1,|k|), k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$,

$$T_N^{(3)}(x,y) = \sum_{0\le max\,(|n|,|m|)<N} a_{nm} e^{i(nx+my)},$$

$$T_N^{(4)}(x,y) = \sum_{0\le n^2+m^2<N^2} a_{nm} e^{i(nx+my)}.$$

Хорошо известно ([1], с. 397),

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_{nm}(f)|^2, \qquad (2)$$

$$E_N^{(s)}(f) = \left\|f - S_N^{(s)}\right\|, s = 1,2,3,4 \qquad (3)$$

$$E_N^{(1)}(f) = \left(\sum_{|n|+|m|\ge N} |c_{nm}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad E_N^{(2)}(f) = \left(\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\ge N} |c_{nm}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E_N^{(3)}(f) = \left(\sum_{max\,(|n|,|m|)\ge N} |c_{nm}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$E_N^{(4)}(f) = \left(\sum_{n^2+m^2\ge N^2} |c_{nm}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть B – единичный шар в пространстве L_2, $G_N \subset L_2$ – N –мерное подпространство, $G^N \subset L_2$ – подпространство коразмерности N, $A: L_2 \to G_N$ – линейный ограниченный оператор, $A^{\perp}: L_2 \to G_N$ –

линейный ограниченный оператор проектирования, $M \subset L_2$ – выпуклое центрально-симметричное множество. Напомним, что величины

$$d_N(M) = d_N(M, L_2) = \inf_{G_N \subset L_2} \left\{ \sup_{f \in M} \left\{ \inf_{g \in G_N} \|f - g\| \right\} \right\},$$

$$b_N(M) = b_N(M, L_2) = \sup_{G_{N+1} \subset L_2} \left\{ \sup_{\varepsilon > 0} \{\varepsilon : \varepsilon B \cap G_{N+1} \subset M\} \right\},$$

$$d^n(M) = d^n(M, L_2) = \inf_{G_N \subset L_2} \left\{ \sup_{f \in M \cap G^N} \|f\| \right\},$$

$$\delta_N(M) = \delta_N(M, L_2) = \inf_{G_N \subset L_2} \left\{ \inf_{A\, L_2 \subset G_N} \left\{ \sup_{f \in L_2} \|f - Af\| \right\} \right\},$$

$$\pi_N(M) = \pi_N(M, L_2) = \inf_{G_N \subset L_2} \left\{ \inf_{A^{\perp}\, L_2 \subset G_N} \left\{ \sup_{f \in M} \|f - A^{\perp} f\| \right\} \right\}$$

называются ([1], с. 217) соответственно колмогоровским, бернштейновским, гельфандовским, линейным и проекционным N–поперечниками множества M.

Так как пространство L_2 является гильбертовым, эти величины связаны соотношениями ([1], с. 239)

$$b_N(M) \le d^N(M) \le d_N(M) = \delta_N(M) = \pi_N(M).$$

Определим теперь функцию

$$T(x, u; y, v; \theta(h)) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \theta^{|n|+|m|}(h) exp i[n(x-u) + m(y-v)],$$

где $\theta(h)$ $(0 < h < 1)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая условиям $0 < \theta(h) < 1$, $\theta(h) \to 0$ $(h \to 0+)$ и сходимость ряда справа понимается в топологии пространства $L_2(Q \times Q)$ (это обозначение очевидно).

В пространстве L_2 определим оператор

$$F_h f(x, y) = F_{\theta(h)} f(x, y) =$$

$$= \iint_Q f(u, v) T(x, u; y, v; 1 - \theta(h)) du dv,$$

который назовем оператором обобщенного сдвига.

Нетрудно показать, что

1) $F_h(f_1 + f_2) = F_h f_1 + F_h f_2$,
2) $F_h(\lambda f) = \lambda(F_h f), \lambda \in \mathbb{C}$,
3) $\|F_h f\| \le \|f\|$,
4) $\|F_h f - f\| \to 0, h \to 0+$,
5) $F_h\left(e^{i(nx+my)}\right) = \left(1 - \theta(h)\right)^{|n|+|m|} e^{i(nx+my)}$.

Пусть $f \in L_2$. Определим конечные разности первого и высших порядков как и в классическом случае, т.е.

$$\Delta_h f = F_h f - f = (F_h - E) f,$$

$$\Delta_h^k f = \Delta_h\left(\Delta_h^{k-1} f\right) = (F_h - E)^k f = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} F_h^l f,$$

где

$$F_h^0 f = Ef = f, F_h^l f = F_h\left(F_h^{l-1}\right), l = 1,2, \dots, k; k = 1,2, \dots$$

и E – единичный оператор в пространстве L_2.

Величину

$$\Omega_k(f; \delta) = \sup_{0 < h \le \delta} \left\|\Delta_h^k f\right\| \ (k = 1,2, \dots)$$

назовем обобщённым модулем непрерывности k – го порядка функции $f \in L_2$.

Обозначим через $W_k(\Phi)$ класс функций $f \in L_2$, для которых

$$\Omega_k(f; \delta) \le \Phi(\delta), \qquad 0 < \delta < 1,$$

где $\Phi(\delta)$ – неотрицательная монотонно возрастающая функция и $\Phi(\delta) \to 0$ $(\delta \to +0)$, а через W_k – класс функций $f \in L_2$, для которых

$$\frac{1}{h} \int_0^h \Omega_k^{\frac{1}{k}}(f; t) dt \le 1.$$

2. В этом пункте мы будем исследовать поведение величин $E_N^{(s)}(f)$ $(s = 1,2,3)$ на классах функций $W_k(\Phi)$ и W_k.

Так как для любой функции $f \in L_2$

$$E_N^{(3)}(f) \le E_N^{(1)}(f) \le E_{\left[\frac{N}{2}\right]}^{(3)}(f) \le E_{\left[\frac{N}{2}\right]}^{(1)}(f),$$

то ограничимся исследованием величин $E_N^{(1)}(f), E_N^{(2)}(f)$ и $E_N^{(4)}(f)$.

Теорема 1. Для любой функции $f \in L_2$ справедлива оценка

$$E_N^{(1)}(f) \le \left[1 - \left(1 - \theta(h)\right)^N\right]^{-k} \Omega_k(f; h)$$
$$(0 < \theta(h) < 1, 0 < h < 1;\ k = 1,2, \dots; N = 1, 2, \dots).$$

В правой части неравенства константу при каждом фиксированном $N = 1, 2, \dots$ уменьшить нельзя.

Теорема 2. Для любой функции $f \in L_2$ справедлива оценка

$$E_N^{(2)}(f) \le \left[1 - \left(1 - \theta(h)\right)^{2\sqrt{N}}\right]^{-k} \Omega_k(f; h)$$
$$(0 < \theta(h) < 1, 0 < h < 1;\ k = 1,2, \dots; N = 4, 5, \dots),$$

причем, как и выше, при каждом фиксированном $N = 4, 9, 16, \dots$ константу в правой части неравенства уменьшить нельзя.

Теорема 3. Для любой функции $f \in L_2$ справедлива оценка

$$E_N^{(4)}(f) \le \left[1 - \left(1 - \theta(h)\right)^N\right]^{-k} \Omega_k(f; h)$$
$$(0 < \theta(h) < 1, 0 < h < 1;\ k = 1,2, \dots; N = 1, 2, \dots).$$

и при каждом фиксированном $N = 1, 2, \dots$ константу в правой части неравенства уменьшить нельзя.

Нам представляются интересными следующими интегральные оценки.

Теорема 4. Для любой функции $f \in L_2$ справедлива оценка

$$E_N^{(1)}(f) \le \left(1 - \frac{1}{h}\int_0^h \left(1 - \theta(h)\right)^N dh\right)^{-k} \left(\frac{1}{h}\int_0^h \Omega_k^{\frac{1}{k}}(f; h) dh\right)^k$$
$$(0 < \theta(h) < 1, 0 < h < 1;\ k = 1,2, \dots; N = 1, 2, \dots),$$

и константу в правой части неравенства при каждом фиксированном $N = 1, 2, \dots$ уменьшить нельзя.

Теорема 5. Для любой функции $f \in L_2$ справедлива оценка

$$E_N^{(2)}(f) \le \left(1 - \frac{1}{h}\int_0^h \left(1 - \theta(h)\right)^{2\sqrt{N}} dh\right)^{-k} \left(\frac{1}{h}\int_0^h \Omega_k^{\frac{1}{k}}(f; h) dh\right)^k$$
$$(0 < \theta(h) < 1, 0 < h < 1;\ k = 1,2, \dots; N = 4, 5, \dots),$$

и, как и выше, при каждом фиксированном $N = 4, 9, 16, \dots$ константу в правой части неравенства уменьшить нельзя.

Теорема 6. Для любой функции $f \in L_2$ справедлива оценка

$$E_N^{(4)}(f) \le \left(1 - \frac{1}{h}\int_0^h \left(1 - \theta(h)\right)^N dh\right)^{-k} \left(\frac{1}{h}\int_0^h \Omega_k^{\frac{1}{k}}(f; h) dh\right)^k$$
$$(0 < \theta(h) < 1, 0 < h < 1;\ k = 1,2, \dots; N = 1, 2, \dots),$$

и, вновь, константу в правой части неравенства при каждом фиксированном $N = 1, 2, \dots$ уменьшить нельзя.

Доказательство теоремы 5. Пусть $f \in L_2$. Так как

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{nm}(f) e^{i(nx+my)},$$

то легко показать, что

$$F_h f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \theta(h)\right)^{|n|+|m|} c_{nm}(f) e^{i(nx+my)}.$$

Отсюда и из уравнения замкнутости (2) имеем

$$\|\Delta_h f\|^2 = \|F_h - f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\left(1 - \theta(h)\right)^{|n|+|m|}\right]^2 |c_{nm}(f)|^2.$$

Теперь нетрудно видеть, что

$$\left\|\Delta_h^k f\right\|^2=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[1-\left(1-\theta(h)\right)^{|n|+|m|}\right]^{2k}|c_{nm}(f)|^2.$$

Так как

$$\left(E_N^{(2)}(f)\right)^2=\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\ge N}|c_{nm}(f)|^2,$$

то

$$\left(E_N^{(2)}(f)\right)^2-\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\ge N}\left(1-\theta(h)\right)^{|n|+|m|}|c_{nm}(f)|^2=$$

$$=\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\ge N}|c_{nm}(f)|^2-\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\ge N}\left(1-\theta(h)\right)^{|n|+|m|}|c_{nm}(f)|^2=$$

$$=\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\ge N}\left[1-\left(1-\theta(h)\right)^{|n|+|m|}\right]|c_{nm}(f)|^2=$$

$$=\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\ge N}|c_{nm}(f)|^{2-\frac{1}{k}}|c_{nm}(f)|^{\frac{1}{k}}\left[1-\left(1-\theta(h)\right)^{|n|+|m|}\right]|c_{nm}(f)|^2.$$

Применяя к последней сумме неравенство Гельдера, получим

$$\left(E_N^{(2)}(f)\right)^2-\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\ge N}\left(1-\theta(h)\right)^{|n|+|m|}|c_{nm}(f)|^2\le$$

$$\le\left(\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\ge N}|c_{nm}(f)|^2\right)^{\frac{2k-1}{2k}}\left(\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\ge N}\left[1-(1-\theta(h))^{|n|+|m|}\right]^{2k}|c_{nm}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2k}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\ge N}|c_{nm}(f)|^2\le\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\ge N}\left(1-\theta(h)\right)^{|n|+|m|}|c_{nm}(f)|^2+$$

$$+\left(\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\ge N}|c_{nm}(f)|^2\right)^{\frac{2k-1}{2k}}\left(\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\ge N}\left[1-(1-\theta(h))^{|n|+|m|}\right]^{2k}|c_{nm}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2k}}$$

Отсюда в силу определения $\Omega_k(f;\square)$ имеем

$$\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\ge N}|c_{nm}(f)|^2\le\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\ge N}\left(1-\theta(h)\right)^{|n|+|m|}|c_{nm}(f)|^2+$$

$$+\left(\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\ge N}|c_{nm}(f)|^2\right)^{\frac{2k-1}{2k}}\Omega_k^{\frac{1}{k}}(f;h).$$

Покажем, что

$$\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\ge N}\left(1-\theta(h)\right)^{|n|+|m|}|c_{nm}(f)|^2\le\left(1-\theta(h)\right)^{2\sqrt{N}}\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\ge N}|c_{nm}(f)|^2.$$

Имеем

$$\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\ge N}\left(1-\theta(h)\right)^{|n|+|m|}|c_{nm}(f)|^2=\sum_{|n|\ge N}\left(1-\theta(h)\right)^{|n|}|c_{n0}(f)|^2+$$

$$+\sum_{|m|\ge N}\left(1-\theta(h)\right)^{|m|}|c_{0m}(f)|^2+\sum_{|n|\cdot|m|\ge N}\left(1-\theta(h)\right)^{|n|+|m|}|c_{nm}(f)|^2.$$

Так как

$|n|\ge 2\sqrt{|n|}, |m|\ge 2\sqrt{|m|}$ $(|n|,|m|=4,5,\dots)$,

то

$$\sum_{|m|\ge N}\left(1-\theta(h)\right)^{|m|}|c_{0m}(f)|^2\le\left(1-\theta(h)\right)^{2\sqrt{N}}\sum_{|m|\ge N}|c_{0m}(f)|^2,$$

$$\sum_{|n|\ge N}\left(1-\theta(h)\right)^{|n|}|c_{n0}(f)|^2\le\left(1-\theta(h)\right)^{2\sqrt{N}}\sum_{|n|\ge N}|c_{n0}(f)|^2$$

так как $|n|+|m|\ge 2\sqrt{|n|\cdot|m|}$, а $|n|\cdot|m|\ge N$, то

$$\left(1-\theta(h)\right)^{|n|+|m|}\le\left(1-\theta(h)\right)^{2\sqrt{N}}$$

и поэтому

$$\sum_{|n|\cdot|m|\geq N}\left(1-\theta(h)\right)^{|n|+|m|}|c_{nm}(f)|^2\leq\left(1-\theta(h)\right)^{2\sqrt{N}}\sum_{|n|\cdot|m|\geq N}|c_{nm}(f)|^2.$$

Складывая левые и правые части полученных неравенств, получим требуемое неравенство.

Таким образом,

$$\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\geq N}|c_{nm}(f)|^2\leq\left(1-\theta(h)\right)^{2\sqrt{N}}\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\geq N}|c_{nm}(f)|^2+$$

$$+\left(\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\geq N}|c_{nm}(f)|^2\right)^{\frac{2k-1}{2k}}\Omega_k^{\frac{1}{k}}(f;h).$$

Интегрируя обе части этого неравенства на интервале $(0,\square)$, получим

$$\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\geq N}|c_{nm}(f)|^2\leq\frac{1}{h}\int_0^h\left(1-\theta(h)\right)^{2\sqrt{N}}dh\cdot\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\geq N}|c_{nm}(f)|^2+$$

$$+\left(\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\geq N}|c_{nm}(f)|^2\right)^{\frac{2k-1}{2k}}\left(\frac{1}{h}\int_0^h\Omega_k^{\frac{1}{k}}(f;\square)dh\right)$$

или

$$\left(1-\frac{1}{h}\int_0^h\left(1-\theta(h)\right)^{2\sqrt{N}}dh\right)\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\geq N}|c_{nm}(f)|^2\leq$$

$$\leq\left(\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\geq N}|c_{nm}(f)|^2\right)^{\frac{2k-1}{2k}}\left(\frac{1}{h}\int_0^h\Omega_k^{\frac{1}{k}}(f;\square)dh\right).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{|\bar{n}|\cdot|\bar{m}|\geq N}|c_{nm}(f)|^2\leq\left(1-\frac{1}{h}\int_0^h\left(1-\theta(h)\right)^{2\sqrt{N}}dh\right)^{-2k}\left(\frac{1}{h}\int_0^h\Omega_k^{\frac{1}{k}}(f;\square)dh\right)^{2k}$$

или

$$E_N^{(2)}(f)\leq\left(1-\frac{1}{h}\int_0^h\left(1-\theta(h)\right)^{2\sqrt{N}}dh\right)^{-k}\left(\frac{1}{h}\int_0^h\Omega_k^{\frac{1}{k}}(f;\square)dh\right)^{k}.$$

Нетрудно показать, что при $N=4,9,16,\ldots$ последнее неравенство обращается в равенство, например, для функции

$$f_*(x,y)=e^{i(nx+my)},\qquad n\cdot m=N^2, N=2,3,\ldots.$$

Теоремы 1, 2, 3, 4, 6 доказываются аналогично.

3. В этом пункте мы докажем так называемые обратные теоремы.

Теорема 7. Пусть $f\in L_2$. Тогда

$$\Omega_k(f,\square)\leq\left((2\theta(\square))^{2k}\sum_{1\leq n\leq[\theta(\square)]^{-1}}n^{2k-1}\left(E_n^{(1)}(f)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(0<\theta(h)<1, 0<h<1;\ k=1,2,\ldots).$$

Доказательство. Выберем $N=[\theta(h)]^{-1}$ (здесь и выше $[a]$ – целая часть числа $a>0$). Так как

$$\left\|\Delta_h^k f\right\|^2=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[\left(1-\theta(h)\right)^{|n|+|m|}\right]^{2k}|c_{nm}(f)|^2,$$

то

$$\left\|\Delta_h^k f\right\|^2=\sum_{1\leq|\bar{n}|+|\bar{m}|\leq N}\left[1-\left(1-\theta(h)\right)^{|n|+|m|}\right]^{2k}|c_{nm}(f)|^2+$$

$$+\sum_{|\bar{n}|+|\bar{m}|\geq N+1}\left[1-\left(1-\theta(h)\right)^{|n|+|m|}\right]^{2k}|c_{nm}(f)|^2.$$

В силу неравенства Бернулли

$$(1-x)^n\geq 1-nx,\qquad 0<x<1,\qquad n=1,2,\ldots$$

имеем

$$1-\left(1-\theta(h)\right)^{|n|+|m|}\leq(|n|+|m|)\theta(h),$$

кроме того,

$$1-\left(1-\theta(h)\right)^{|n|+|m|}\le 1.$$

Поэтому

$$\left\|\Delta_h^k f\right\|^2\le\theta^{2k}(h)\sum_{1\le|n|+|m|\le N}(|n|+|m|)^{2k}|c_{nm}(f)|^2+\sum_{|n|+|m|\ge N+1}|c_{nm}(f)|^2=$$

$$=\theta^{2k}(h)\left[\sum_{1\le|n|+|m|\le N}(|n|+|m|)^{2k}|c_{nm}(f)|^2+\right.$$

$$\left.+\theta^{-2k}(h)\sum_{|n|+|m|\ge N+1}|c_{nm}(f)|^2\right]\le$$

$$\le\theta^{2k}(h)\left[\sum_{1\le|n|+|m|\le N}(|n|+|m|)^{2k}|c_{nm}(f)|^2+N^{2k}\sum_{|n|+|m|\ge N+1}|c_{nm}(f)|^2\right]=$$

$$=\theta^{2k}(h)\left[\sum_{l=1}^{N}\left(\sum_{|n|+|m|=l}(|n|+|m|)^{2k}|c_{nm}(f)|^2\right)+\right.$$

$$\left.+N^{2k}\sum_{|n|+|m|\ge N+1}|c_{nm}(f)|^2\right]=$$

$$=\theta^{2k}(h)\left[\sum_{l=1}^{N}l^{2k}\left(\sum_{|n|+|m|=l}|c_{nm}(f)|^2\right)+N^{2k}\sum_{|n|+|m|\ge N+1}|c_{nm}(f)|^2\right]=$$

$$=\theta^{2k}(h)\left[\sum_{l=1}^{N}l^{2k}\left(\sum_{|n|+|m|>l}|c_{nm}(f)|^2-\sum_{|n|+|m|\ge l+1}|c_{nm}(f)|^2\right)+\right.$$

$$\left.+N^{2k}\sum_{|n|+|m|\ge N+1}|c_{nm}(f)|^2\right]=$$

$$=\theta^{2k}(h)\left[\sum_{l=1}^{N}l^{2k}\left(\sum_{|n|+|m|>l}|c_{nm}(f)|^2\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{l=1}^{N}l^{2k}\left(\sum_{|n|+|m|>l+1}|c_{nm}(f)|^2\right)++N^{2k}\sum_{|n|+|m|\ge N+1}|c_{nm}(f)|^2\right]=$$

$$=\theta^{2k}(h)\sum_{l=1}^{N}(l^{2k}-(l-1)^{2k})\sum_{|n|+|m|\ge l}|c_{nm}(f)|^2.$$

Таким образом,

$$\left\|\Delta_h^k f\right\|^2\le\theta^{2k}(h)\sum_{l=1}^{N}(l^{2k}-(l-1)^{2k})\sum_{|n|+|m|\ge l}|c_{nm}(f)|^2.$$

Так как $(n+1)^p-n^p\le 2^p n^{p-1}$, то

$$\left\|\Delta_h^k f\right\|^2\le 2^{2k}\theta^{2k}(h)\sum_{l=1}^{N}l^{2k-1}\left(\sum_{|n|+|m|\ge l}|c_{nm}(f)|^2\right).$$

Отсюда очевидно следует, что

$$\Omega_k(f;h)\le\left(\left(2\theta(h)\right)^{2k}\sum_{1\le n\le[\theta(h)]^{-1}}n^{2k-1}\left(E_n^{(1)}(f)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогичные утверждения можно доказать и для $E_N^{(s)}(f)$ $(s=2,3,4)$.

4. Здесь мы дадим оценки N – поперечников классов функций, определенных выше в пространстве L_2.

Обозначим через $\gamma_N(M)$ общее значение перечисленных выше поперечников, а через $\nu(N)$ число точек с целочисленными координатами в ромбе $0\le|n|+|m|<N$ $(N=1,2,\dots)$, т.е.

$$\nu(N)=card\{(n,m):0\le|n|+|m|<N\}.$$

Нетрудно показать, что

$$\nu(N)=2(N-1)^2+2(N-1)+1,$$

кроме того

$$\nu(N+1)=\nu(N)+4N.$$

Теорема 8. Справедливо равенство

$$\gamma_{\nu(N)+l}\big(W_k(\Phi)\big)=\Big[1-\big(1-\theta(h)\big)^N\Big]^{-k}\Phi(h)$$

$$(0<\theta(h)<1, 0<h<1; l=0,1,\dots,4N-1; N=1,2,\dots;\ k=1,2,\dots).$$

Теорема 9. Справедливо равенство

$$\gamma_{\nu(N)+l}(W_k)=\left(1-\frac{1}{h}\int_0^h\big(1-\theta(h)\big)^N dh\right)^{-k}$$

$$(0<\theta(h)<1, 0<h<1; l=0,1,\dots,4N-1; N=1,2,\dots;\ k=1,2,\dots).$$

Доказательство теоремы 8. Так как

$$E_N^{(1)}(f)=\left\|f-S_N^{(1)}f\right\|$$

и сумма $S_N^{(1)}(f)$ содержит $\nu(N)$ линейно независимых функций, то очевидно, что

$$d_{\nu(N)}\big(W_k(\Phi)\big)\le\Big[1-\big(1-\theta(h)\big)^N\Big]^{-k}\Phi(h)$$

и тем более,

$$d_{\nu(N)+l}\big(W_k(\Phi)\big)\le\Big[1-\big(1-\theta(h)\big)^N\Big]^{-k}\Phi(h)$$

$$(l=0,1,\dots,4N-1).$$

Отсюда следует, что

$$\gamma_{\nu(N)+l}\big(W_k(\Phi)\big)\le\Big[1-\big(1-\theta(h)\big)^N\Big]^{-k}\Phi(h)$$

$$(l=0,1,2,\dots,4N-1).$$

Для оценки снизу $\gamma_{\nu(N)+l}\big(W_k(\Phi)\big)$, оценим снизу поперечник $b_{\nu(N)+l}\big(W_k(\Phi)\big)$.
Обозначим через G_N подпространство тригонометрических полиномов

$$T_N(x,y)=\sum_{0\le|n|+|m|\le N}a_{nm}e^{i(nx+my)}.$$

В силу (4)

$$dimG_N=\nu(N+1)=2N^2+2N+1.$$

Рассмотрим в подпространстве G_N шар εB радиуса

$$\varepsilon=\Big[1-\big(1-\theta(h)\big)^N\Big]^{-k}\Phi(h),$$

т.е.

$$\varepsilon B=\left\{T_N(x,y)\in G_N:\|T_N\|\le\Big[1-\big(1-\theta(h)\big)^N\Big]^{-k}\Phi(h)\right\}$$

и покажем, что $\varepsilon B\subset W_k(\Phi)$.
Пусть $T_N\in\varepsilon B$. Так как

$$F_h\big(T_N(x,y)\big)=F_h\left(\sum_{0\le|n|+|m|\le N}a_{nm}e^{i(nx+my)}\right)=$$

$$=\sum_{0\le|n|+|m|\le N}a_{nm}F_h\big(e^{i(nx+my)}\big)=\sum_{0\le|n|+|m|\le N}a_{nm}\big(1-\theta(h)\big)^{|n|+|m|}e^{i(nx+my)}),$$

то

$$\left\|\Delta_h^kT_N\right\|^2=\sum_{0\le|n|+|m|\le N}\Big[1-\big(1-\theta(h)\big)^{|n|+|m|}\Big]^{2k}|a_{nm}|^2.$$

Следовательно,

$$\left\|\Delta_h^kT_N\right\|^2\le\Big[1-\big(1-\theta(h)\big)^N\Big]^{2k}\sum_{0\le|n|+|m|\le N}|a_{nm}|^2\le$$

$$\le\Big[1-\big(1-\theta(h)\big)^N\Big]^{2k}\Big[1-\big(1-\theta(h)\big)^N\Big]^{-2k}\Phi^2(h)=\Phi^2(h),$$

то есть

$$\left\|\Delta_h^kT_N\right\|\le\ \Phi(h).$$

Отсюда следует, что

$$\Omega_k(T_N,h)\le\Phi(h),$$

то есть $T_N\in W_k(\Phi)$.
Итак, мы показали, что $\varepsilon B\subset W_k(\Phi)$.
Следовательно,

$$b_{\nu(N)-1}\big(W_k(\Phi)\big)\ge\Big[1-\big(1-\theta(h)\big)^N\Big]^{-k}\Phi(h).$$

Так как

$$\nu(N)+l\le \nu(N+1)-1, \qquad l=0,1,\dots,4N-1,$$

то

$$b_{\nu(N)+l}\big(W_k(\Phi)\big)\ge\ b_{\nu(N+1)-1}\big(W_k(\Phi)\big).$$

Поэтому

$$b_{\nu(N)+l}\big(W_k(\Phi)\big)\ge\left[1-\big(1-\theta(h)\big)^N\right]^{-k}\Phi(h).$$

Отсюда следует, что

$$\gamma_{\nu(N)++l}\big(W_k(\Phi)\big)\ge\left[1-\big(1-\theta(h)\big)^N\right]^{-k}\Phi(h). \qquad (6)$$

Из оценок (5), (6) следует требуемое равенство.

Теорема 9 доказывается аналогично.

5. В этом пункте мы распространим полученные выше результаты на классы «дифференцируемых» функций в пространстве L_2.

Пусть $f\in L_2$. Определим ее r $(r>0)$ – ую «производную»

$$f^{(r)}(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(|n|+|m|)^r\,c_{nm}(f)e^{i(nx+my)} \qquad (7)$$

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(|n|+|m|)^{2r}\,|c_{nm}(f)|^2<+\infty\right).$$

Класс функций из L_2, представимых в виде (7) обозначим через L_2^r.

Рассмотрим еще два класса функций

$$W_k^r(\Phi)=\left\{f\epsilon L_2^r\colon \Omega_k\big(f^{(r)};\delta\big)\le\Phi(\delta)\right\},$$

$$W_k^r=\left\{f\epsilon L_2^r\colon\ \frac{1}{h}\int_0^h\Omega_k^{\frac{1}{k}}\big(f^{(r)};h\big)dh\le 1\right\}$$

$$(r>0,\qquad 0<h<1,\qquad k=1,2,\dots),$$

кроме того,

$$L_2^0=L_2, W_k^0(\Phi)=W_k(\Phi), W_k^0=W_k.$$

Пусть $f\in L_2^r$. Нетрудно показать, что

$$E_N^{(1)}(f)\le\frac{1}{N^r}E_N^{(1)}\big(f^{(r)}\big),\qquad E_N^{(2)}(f)\le\frac{1}{\big(2\sqrt{N}\big)^r}E_N^{(2)}\big(f^{(r)}\big).$$

Отсюда и из полученных выше оценок для наилучших приближений на классах $W_k(\Phi)$, W_k, а также из оценок N – поперечников этих классов будут следовать точные оценки наилучших приближений на классах $W_k^r(\Phi), W_k^r$, а также N – поперечников этих классов функций.

Например,

$$\gamma_{\nu(N)++l}\big(W_k^r(\Phi)\big)=\frac{1}{N^r}\left[1-\big(1-\theta(h)\big)^N\right]^{-k}\ \Phi(h)$$

$$(l=0,1,\dots,4N-1;k=1,2,\dots;r>0;N=1,2,\dots).$$

В заключение отметим, что, пользуясь методами работ [3], [4] можно также доказать и следующая теорему.

Теорема. Пусть $f\in L_2$. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-1}E_n^{(1)}(f)<+\infty\ \ (r>1),$$

то $f\in L_2^r$ и

$$\Omega_k\big(f^{(r)},h\big)\le\left(16^{r+k}\big(\theta(h)\big)^{2k}\sum_{n=1}^{N}n^{2(r+k)-1}\left(E_n^{(1)}(f)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+2^{4r+1}\sum_{n\ge N}n^{r-1}E_n^{(1)}(f)$$

$$(0<\theta(h)<1, 0<h<1; k=1,2,\dots;N=1,2,\dots;r>1).$$

Замечания. 1. Аналогичным вопросам в одномерном случае посвящена работа [5].

2. Некоторые вопросы, рассмотренные в этой статье, пересекаются с вопросами, рассмотренными в работах [6] – [8].

3. Нетрудно видеть, что рассмотренные выше методы приближения, а также оценки наилучших приближений приводят нас еще к некоторым классам функций [9].

Пусть

$$D = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

(оператор Лапласа).

Рассмотрим следующие классы функций:

$L_2^r(D)$ – класс функций $f \in L_2$, имеющих частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{dxdy}, \dots$$

в смысле Леви ([10], с. 172), для которых

$$D^r f \in L_2, D^r f = D(D^{r-1} f), r = 1,2, \dots;$$

$$W_k^r(D, \Phi) = \{f \in L_2^r(D) : \Omega_k(D^r f; \delta) \le \Phi(\delta)\};$$

$$W_k^r(D) = \left\{ f \in L_2^r(D) : \frac{1}{h} \int_0^h \Omega_k^{\frac{1}{k}}(D^r f; h)\, dh \le 1 \right\}$$

$$(r = 1,2, \dots; k = 1,2, \dots; 0 < h < 1).$$

Так как для любой функции $f \in L_2^r(D)$

$$c_{nm}(f) = (-1)^r \frac{1}{(n^2 + m^2)^r} c_{nm}(D^r f) \;\; (r = 1, 2, \dots),$$

то нетрудно доказать аналоги доказанных выше оценок наилучших приближений и на только что введенных классах функций.

Список литературы / References

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа: М. Наука, 1976.
2. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Издательство МГУ, 1976.
3. *Абилов В.А., Абилова Ф.В., Абилов М.В.* Некоторые обратные теоремы приближения функций суммами Фурье-Лагерра //Известия вузов. Математика, 2010, №9, С. 3-9.
4. *Abilov V.A., Abilov M.V.* Certain problems of the approximation of functions in two variables by Fourier-Hermite sums in the space $L_2(\mathbb{R}^2; e^{-x^2-y^2})$ //Analysis Mathematica, 32(2006), p. 163-167.
5. *Керимов М. К., Селимханов Э.В.* О точных оценках скорости сходимости рядов Фурье для функций одной переменной в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2016, Т.56, №5, С.1364-1368.
6. *Абилова Ф.В., Селимханов Э.В.* Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье двух переменных и их приложения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018, Т.58. №10, С. 1596-1605.
7. *Селимханов Э.В.* Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по произвольным ортогональным системам// Проблемы современной науки и образования. 2018, №04, С. 17-28.
8. *Селимханов Э.В., Абилова Ф.В.* Точные оценки скорости сходимости ряда Фурье в Гильбертовом пространстве// Вестник науки и образования №9(63), 2019, С. 5-13.
9. *Abilov V.A.* On the Convergence of Multiple Series and Quadrature Formulae. // Mathematica Balkanica. New Series Vol. 16, 2002, Fasc. 1-4, p. 73-94.
10. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука. 1969.