ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Селимханов Э.В.[1], Абилова Ф.В.[2] Email: Selimkhanov663@scientifictext.ru

.

[1]Селимханов Эмирхан Валерьевич - магистр,
факультет математики и компьютерных наук,
Дагестанский государственный университет;
[2]Абилова Фарида Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент,
кафедра высшей математики,
Дагестанский государственный технический университет,
г. Махачкала

Аннотация: *в статье даны точные оценки скорости сходимости (наилучших приближений) ряда Фурье по произвольной ортонормированной системе векторов в гильбертовом пространстве. Известно, что в вопросах, связанных с оценками скорости сходимости (наилучших приближений) рядов Фурье по тригонометрической системе функций, по специальным функциям математической физики, важную роль играет модуль непрерывности разлагающей в ряд Фурье функции. Он связан с «теоремами сложения» и «теоремами умножения» для специальных функций математической физики. В общем случае таких теорем нет. Ранее, пользуясь некоторыми известными фактами, мы построили обобщенный модуль непрерывности функции, который позволил оценить скорость сходимости рядов Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля и по классическим ортогональным многочленам. Здесь, развивая эти идеи, мы строим оператор усреднения (сдвига), затем обобщенный модуль непрерывности произвольного вектора гильбертова пространства, который позволяет дать точные оценки скорости сходимости (наилучших приближений) рядов Фурье по произвольным ортонормированным системам векторов в гильбертовом пространстве. В статье также установлена связь между скоростью сходимости и гладкостью вектора, что оправдывает введение характеристики произвольного вектора в гильбертовом пространстве.*

Ключевые слова: *гильбертово пространство, ряд Фурье, оператор сдвига, обобщенный модуль непрерывности, N – поперечник Колмогорова.*

SHARP ESTIMATES OF THE CONVERGENCE RATE OF A FOURIER SERIES IN A HILBERT SPACE

Selimkhanov E.V.[1], Abilova F.V.[2]

[1]Selimkhanov Emirkhan Valerievich - master student,
FACULTY OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE,
DAGESTAN STATE UNIVERSITY;
[2]Abilova Farida Vladimirovna - Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
DEPARTMENT OF HIGHER MATHEMATICS,
DAGESTAN STATE TECHNICAL UNIVERSITY,
MAKHACHKALA

***Abstract**: the article provides accurate estimates of the rate of convergence (best approximations) of the Fourier series in an arbitrary orthonormal system of vectors in a Hilbert space. It is known that in matters related to estimates of the rate of convergence (best approximations) of Fourier series in the trigonometric system of functions, in special functions of mathematical physics, an important role is played by the modulus of continuity of the function decomposing into a Fourier series. It is associated with "addition theorems" and "multiplication theorems" for special functions of mathematical physics. In general, there are no such theorems. Earlier, using some well-known facts, we constructed a generalized modulus of function continuity, which made it possible to estimate the rate of convergence of Fourier series using the eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem and using classical orthogonal polynomials. Here, developing these ideas, we construct an averaging (shift) operator, then a generalized modulus of continuity of an arbitrary vector of Hilbert space, which allows us to give exact estimates of the rate of convergence (best approximations) of the Fourier series using arbitrary orthonormal systems of vectors in the Hilbert space. The article also establishes a relationship between the rate of convergence and the smoothness of the vector, which justifies the introduction of the characteristics of an arbitrary vector in a Hilbert space.*

Keywords: *Hilbert space, Fourier series, shift operator, generalized modulus of continuity, N - Kolmogorov diameter.*

УДК 517.519

В статье даны точные оценки скорости сходимости (наилучших приближений) ряда Фурье по произвольной полной ортонормированной системе векторов в гильбертовом пространстве, установлена связь между скоростью сходимости (наилучшими приближениями) и гладкостью векторов пространства, что оправдывает введенную характеристику гладкости векторов, а также даны точные оценки N – поперечника Колмогорова одного класса векторов гильбертова пространства, связанного с указанной характеристикой гладкости.

Введем следующие обозначения:

1. H – вещественное сепарабельное гильбертово пространство ([1], с.155), (f, g) – скалярное произведение векторов $f, g \in H$ и $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ – норма вектора $f \in H$.

2. $\{g_n\} \subset H$ – полная ортонормированная система векторов

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)\, g_n, \qquad c_n(f) = (f, g_n),\ \ n = 0,1, \dots \qquad (1)$$

ряд Фурье вектора $f \in H$,

$$S_N(f) = \sum_{0 \le n < N} c_n(f)\, g_n;\ \ N = 0,1, \dots$$

- частичные сумма ряда (1).

3.

$$E_N(f) = \inf_{P_N} \|f - P_N\|, \qquad N = 0,1, \dots$$

- наилучшее приближение вектора $f \in H$ полиномами

$$P_N = \sum_{0 \le n < N} a_n\, g_n;\ \ N = 0,1, \dots$$

(известно ([1], с.150), что

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2(f),$$

$$E_N^2(f) = \|f - S_N f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{0 \le n < N} c_n^2(f) = \sqrt{\sum_{n \ge N} c_n^2(f)}\Bigg).$$

4.

$$d_N(M) = d_N(M; H) = \inf_{G_N}\left\{\sup_{f \in M}\left\{\inf_{g \in G_N} \|f - g\|\right\}\right\},$$

где последний раз inf берется по всем подпространствам $G_N \subset H$ размерности $N \in \mathbb{N} -$ N – поперечник Колмогорова([2], с.182) центрально симметричного класса векторов $M \subset H$ (*н*апомним, что если

$$d_N(M) = \sup_{f \in M}\left\{\inf_{g \in G_N} \|f - g\|\right\},$$

то подпространство G_N называется экстремальным для класса M в пространстве H).

В пространстве H определим оператор усреднения (сдвига) $F_h: H \to H$

$$F_h f = \sum_{n=0}^{\infty} (1-h)^n\, c_n(f) g_n, \qquad 0 < h < 1.$$

Нетрудно показать, что F_h удовлетворяет следующим условиям:

1) $F_h(f_1 + f_2) = F_h f_1 + F_h f_2$,

2) $F_h(\lambda f) = \lambda F_h f \quad (\lambda \in \mathbb{R})$,

3) $\|F_h f\| \le \|f\|$,

4) $F_h g_n = (1-h)^n g_n$,

5) $\|F_h f - f\| \to 0, h \to 0+$.

Определим конечные разности первого и высших порядков:

$$\Delta_h f = F_h f - f,$$
$$\Delta_h^k f = \Delta_h\left(\Delta_h^{k-1} f\right) = (F_h - E)^k f =$$
$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} F_h^j f,$$

где $F_h^0 f = f, F_h^j f = F_h\left(F_h^{j-1} f\right),\ j = 1,2, \dots, k, E$ – единичный оператор в пространстве H.

Величину

$$\Omega_k(f, \delta) = \sup_{0 < h \le \delta} \left\|\Delta_h^k f\right\|, k = 1,2, \dots$$

будем называть обобщённым модулем непрерывности вектора $f \in H$.

Следует отметить, что в ряде конкретных случаев, например, когда пространство H совпадает с известными пространствами $L_2\left(\mathbb{R}, e^{-x^2}\right), L_2(\mathbb{R}_+, e^{-x}x^\alpha)\ (\alpha > -1), L_2\left((-1,1), (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\right)$

$(\alpha > -1, \beta > -1)$ для оператора F_h можно указать и интегральное представление (см., напр., [3] и цитир. там литерат.).

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Для любого вектора $f \in H$ при любом $h \in (0,1)$ справедлива оценка

$$E_N(f) \leq [1-(1-h)^N]^{-k}\Omega_k(f;h), N = 1,2,...,$$
$$k = 1,2,..., \qquad (2)$$

причем при каждом фиксированном N константа в правой части неравенства (2) уменьшена быть не может.

Теорема 2. Пусть $f \in H$. Тогда

$$E_N(f) \leq$$
$$\leq (N+1)^k\left(1-\frac{1}{N+1}\right)^{-(N+1)k}\left(\int_0^{\frac{1}{N+1}}\Omega_k^{\frac{1}{k}}(f,h)dh\right)^k \qquad (3)$$
$$(h \in (0,1);\ N = 1,2,\dots;\ k = 1,2,\dots),$$

причем, как и выше, при каждом фиксированном N константу в правой части неравенства (3) уменьшить нельзя.

Теорема 3. Для любого вектора $f \in H$ при любом $h \in (0,1)$ справедлива оценка

$$\Omega_k(f;\delta) \leq \left(2k(2h)^{2k}\sum_{1\leq n\leq\left[\frac{1}{h}\right]} n^{2k-1}E_N^2(f)\right)^{\frac{1}{2}}, k = 1,2,...,$$

где, как обычно, $\left[\frac{1}{h}\right]$ - целая часть числа $\frac{1}{h}$.

Теорема 4. Для N – поперечника Колмогорова класса $W^k(\Phi)$ справедливо равенство

$$d_N(W^k(\Phi); H) = [1-(1-\delta)^N]^{-k}\Phi(\delta),$$
$$(\delta \in (0,1); N = 1,2,\dots; k = 1,2,\dots).$$

Экстремальным подпространством для класса $W^k(\Phi)$ будет подпространство, порожденное системой векторов $g_n, n = 0,1,\dots,N-1$.

Замечания. 1. Из неравенства

$$E_N(f) \leq [1-(1-h)^N]^{-k}\Omega_k(f;h)$$

очевидно, следует равенство

$$sup\left\{\frac{E_N(f)}{\Omega_k(f;h)}, f \in H\right\} = [1-(1-h)^N]^{-k}.$$

Полагая здесь $h = N^{-1}$, имеем

$$sup\left\{\frac{E_N(f)}{\Omega_k(f;N^{-1})}, f \in H\right\} = \left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^N\right]^{-k}.$$

Отсюда следует, что

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\left\{sup\left\{\frac{E_N(f)}{\Omega_k(f;N^{-1})}, f \in L_2\right\}\right\} = \left(1-\frac{1}{e}\right)^{-k}.$$

2. Из теорем 1 и 3, очевидно, следует, что

$$E_N(f) = O(N^{-\alpha}) \Leftrightarrow \Omega(f;\delta) = O(\delta^\alpha)$$
$$(0 < \alpha < 1, N \to \infty).$$

При доказательствах сформулированных выше теорем мы пользовались хорошо известными методами (см., напр., [3]-[5] и цитир. там литер.).

Список литературы / References

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с.
2. *Колмогоров А.Н.* Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1987. 470 с.
3. *Абилова Ф.В.* Некоторые вопросы разложения функций в ряды Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля. Диссерт. на соиск. уч. степ. канд. физмат. наук, М. 2003. 101 с.

4. *Селимханов Э.В.* Точные оценки скорости сходимости ряда Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля. //Вестник науки и образования. 2018, № 3 (39), С. 6-14.
5. *Селимханов Э.В.* Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по произвольным ортогональным системам. //Проблемы современной науки и образования. 2018, №4 (124), С. 17-29.