ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Селимханов Э.В. Email: Selimkhanov639@scientifictext.ru

Селимханов Эмирхан Валерьевич - бакалавр,
факультет математики и компьютерных наук,
Дагестанский государственный университет, г. Махачкала

Аннотация: *в статье даны точные оценки скорости сходимости (наилучших приближений) ряда Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля на классах функций, характеризующихся обобщенным модулем непрерывности, а также оценки N – поперечников Колмогорова этих классов. В вопросах, связанных с разложениями функций в ряды Фурье и оценками их скорости сходимости (наилучших приближений) по тригонометрической системе функций и по некоторым другим ортогональным системам, например, по классическим ортогональным многочленам, существенную роль играют операторы сдвига. Они связаны с «теоремами сложения» и «теоремами умножения» для этих систем. В общем случае таких теорем нет. В работе, опираясь на некоторые ранее известные факты, построен обобщенный модуль непрерывности. Введение такого модуля непрерывности функции оправдывается связью между скоростью сходимости ее ряда Фурье и поведением ее обобщенного модуля непрерывности (прямая и обратная теорема теории приближений).*
Ключевые слова: *оператор сдвига, оператор Штурма-Лиувилля, N – поперечник Колмогорова, ряд Фурье.*

EXACT ESTIMATES OF THE SPEED OF THE CONVERGENCE OF A SERIES OF FOURIER ON THE OWN FUNCTIONS OF THE STURM-LIUVILLE PROBLEM

Selimkhanov E.V.

Selimkhanov Emirkhan Valerievich - Bachelor,
FACULTY OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE,
DAGESTAN STATE UNIVERSITY, MAKHACHKALA

Abstract: *in this paper, we give sharp estimates of the rate of convergence (best approximations) of the Fourier series in eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem on classes of functions characterized by a generalized modulus of continuity, and also estimates of the Kolmogorov N-widths of these classes. In questions related to the expansions of functions in Fourier series and estimates of their rate of convergence (best approximations) with respect to a trigonometric system of functions and some other orthogonal systems, for example, according to classical orthogonal polynomials, an important role is played by the shift operators. They are related to "addition theorems" and "multiplication theorems" for these systems. In the general case, there are no such theorems. In this paper, based on some previously known facts, a generalized continuity modulus is constructed. The introduction of such a modulus of continuity of a function is justified by the connection between the rate of convergence of its Fourier series and the behavior of its generalized modulus of continuity (the direct and inverse theorem of approximation theory).*
Keywords: *shift operator, Sturm-Liouville operator, N - Kolmogorov width, Fourier series.*

УДК 517.519

В статье даны точные оценки скорости сходимости ряда Фурье (наилучших приближений) по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля на некоторых классах функций, характеризующихся обобщенным модулем непрерывности, а также оценки N – поперечников Колмогорова этих классов функций.

1. Пусть

$$D = -\frac{1}{p(x)}\left(\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{d}{dx}\right] - q(x)\right),$$

где $(k(x), k'(x), q(x), p(x)$ – непрерывные функции на отрезке $[a,b]$ и $p(x) > 0, q(x) \geq 0$ на отрезке $[a,b]$) - дифференциальный оператор второго порядка (оператор Штурма-Лиувилля). Напомним, что задача Штурма-Лиувилля ([1], с.346) состоит в отыскании решений на отрезке $[a,b]$ уравнения

$$D[u] = \lambda u, \tag{1}$$

удовлетворяющих однородным краевым условиям

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0, \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0,$$
$$\alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0,\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0. \tag{2}$$

Очевидно, что эта задача всегда имеет нулевое решение. Это решение не представляет интереса. Поэтому задачу (1) - (2) надо рассматривать как задачу на собственные значения для оператора D. Искомые нетривиальные решения называются собственными функциями этой задачи, а значения λ при которых такие решения существуют – ее собственными значениями.

Отметим некоторые свойства собственных значений и собственных функций оператора D:

1) существует счетное множество собственных значений: $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$.

2) каждому собственному значению λ_n соответствует единственная с точностью до постоянного множителя собственная функция u_n.

3) собственные функции $u_n(x), n = 1,2, \ldots$ образуют на отрезке $[a,b]$ ортогональную с весом $p(x)$ систему т.е.

$$\int_a^b p(x)u_n(x)u_m(x)\,dx = 0, n \neq m$$

(в силу п.2) ее можно считать ортонормированной).

4) система собственных функций оператора D полна в пространстве $L_2([a,b],p(x))$ (здесь, как обычно, $L_2 = L_2([a,b],p(x))$ – пространство суммируемых с квадратом функций $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ с весом $p(x)$ и евклидовой нормой, т.е.

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b p(x)f^2(x)dx}\,.$$

5) при граничных условиях $u(a) = u(b) = 0$ и при выполнении условия $q(x) \geq 0 \quad (x \in [a,b])$ собственные значения $\lambda_n \ (n = 1,2, \ldots)$ положительны.

Если не оговорено противное, то именно этот случай мы и будем рассматривать в настоящей работе.

Пусть $f \in L_2$ и

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(f)u_i(x), c_i(f) = \int_a^b p(x)f(x)u_i(x)dx$$

- ее ряд Фурье,

$$S_N(f;x) = \sum_{1 \leq i < N} c_i(f)u_i(x)$$

- частичные суммы этого ряда.

Через

$$E_N(f) = \inf_{P_N}\|f - P_N\|$$

обозначим наилучшее приближение функции $f \in L_2$ полиномами вида

$$P_N(x) = \sum_{1 \leq i < N} a_i u_i(x).$$

Тогда

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2(f) \qquad (3)$$

$$E_N(f) = \|f - S_N(f)\| = \sqrt{\sum_{i \geq N} c_i^2(f)}. \qquad (4)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$T(x,\xi;h) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)u_i(\xi)h^i$$

$$(h \in (0,1), x \in [a,b], \xi \in [a,b]).$$

Известно ([2], с. 272), что в ряде частных случаев для

$$T(x,y;h) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)u_n(y)h^n$$

можно указать и явное выражение.

Рассмотрим оператор $F_h\colon L_2 \to L_2$

$$F_h f(x) = \int_a^b p(t)f(x)T(x,t;1-h)dt.$$

Отметим ряд простых свойств этого оператора:

1) $F_h(f_1+f_2)=F_hf_1+F_hf_2$,
2) $F_h(\lambda f)=\lambda(F_hf), \lambda\in\mathbb{R}$,
3) $\|F_hf\|\le\|f\|$,
4) $F_h\big(u_i(x)v_j(y)\big)=(1-h)^{i+j}u_i(x)v_j(y)$,
5) $\|F_hf-f\|\to 0, h\to 0+$.

Пусть $f\in L_2$. Определим ее конечные разности первого и высших порядков следующим образом:

$$\Delta_hf(x)=F_hf(x)-f(x)=(F_h-E)f(x),$$
$$\Delta_h^kf(x)=\Delta_h\left(\Delta_h^{k-1}f(x)\right)=(F_h-E)^kf(x)=$$
$$=\sum_{i=0}^{k}(-1)^k\binom{k}{i}F_h^if(x),$$

где $F_h^0f(x)=Ef(x)=f(x), F_h^if(x)=F_h\left(F_h^{i-1}f(x)\right)$,
$i=1,2,\dots,k, E$ – единичный оператор в пространстве L_2.

Величину

$$\Omega_k(f;\delta)=\sup_{0<h\le\delta}\left\|\Delta_h^kf(x)\right\|, k=1,2,\dots$$

будем называть обобщённым модулем непрерывности k – го порядка функции $f\in L_2$.

Введем следующие классы функций:

$L_2^r(D)$ – класс функций $f\in L_2$, имеющие производные

$$f'(x), f''(x),\dots$$

в смысле Леви ([3], с.172), для которых

$$D^rf\in L_2, D^rf=D(D^{r-1}f), r=1,2,\dots, D^0f=f$$

и удовлетворяющих граничным условиям

$$f^{(l)}(a)=f^{(l)}(b)=0, l=0,1,\dots,2r$$

(в определении оператора D будем предполагать, что $p(x),k(x),q(x)$ – достаточно гладкими функциями);

$W^r(D)$ – класс функций $f\in L_2^r(D)$, для которых

$$\|D^rf\|\le 1, r=1,2,\dots;$$

$W_k^r(D,\Phi)$ – класс функций $f\in L_2^r(D)$, для которых

$\Omega_k(D^rf;\delta)\le\Phi(\delta), r=0,1,\dots,k=1,2,\dots$,

где $\Phi(\delta)$ – как и выше, неотрицательная монотонно возрастающая функция на $[0,+\infty)$ и $\Phi(0)=0$.

Напомним, что N – поперечником Колмогорова множества $\mathbb{M}\subset L_2$ называется величина

$$d_N(\mathbb{M})=d_N(\mathbb{M},L_2)=\inf_{G_N\subset L_2}\left\{\sup_{f\in\mathbb{M}}\left\{\inf_{g\in G_N}\|f-g\|\right\}\right\},$$

где последний раз точная нижняя грань берется по всем подпространствам $G_N\subset L_2$ размерности $N=1,2,\dots$ ([4], с.186).

Через $W_k(\Phi)$ обозначим класс функций $f\in L_2$, для которых

$$\Omega_k(f;\delta)\le\Phi(\delta), k=1,2,\dots,$$

где $\Phi(\delta)$ – неотрицательная монотонно возрастающая функция на $[0,+\infty)$ и $\Phi(0)=0$.

Нам понадобятся две простые леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $f\in L_2^r(D)$. Тогда

$$c_i(f)=\frac{1}{\lambda_i^r}c_i(D^rf), i=1,2,\dots; r=1,2,\dots.$$

ЛЕММА 2. Для любой функции $f\in L_2^r(D)$ справедливо равенство

$$\left\|\Delta_h^kf\right\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}[1-(1-h)^i]^{2k}\lambda_i^{2r}c_i^2(D^rf)$$
$$(r=0,1,2,\dots).$$

2. Справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Для любой функции $f\in L_2$ независимо от граничных условий справедлива оценка

$$E_N(f)\le(1-(1-h)^N)^{-k}\Omega_k(f,h)$$
$$(h\in(0,1), k=1,2,\dots,N=1,2,\dots),$$

причем при каждом фиксированном $N=1,2,\dots$ константа в правой части неравенства уменьшена быть не может.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f\in L_2$. Тогда

$$\Omega_k(f,h) \le \left((8h)^{2k} \sum_{1\le l<\left[\frac{1}{2h}\right]} l^{2k-1} E_l^2(f) \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\left(h \in \left(1, \frac{1}{4}\right), k = 1,2,\ldots \right).$$

Из теорем 1 и 2 следует, что

$$E_N(f) = O(N^{-\alpha}) \Leftrightarrow \Omega(f,h) = O(h^{\alpha})$$
$$(0 < \alpha < 1).$$

ТЕОРЕМА 3. Для любой функции $f \in L_2^r(D)$ справедлива оценка

$$E_N(f) \le (1-(1-h)^N)^{-k} \lambda_N^{-r} \Omega_k(D^r f, h) \qquad (5)$$
$$(h \in (0,1), k = 1,2,\ldots, r = 1,2,.., N = 1,2,\ldots),$$

причем при каждом фиксированном $N = 1,2,\ldots$ константа в правой части неравенства уменьшена быть не может.

Доказательство. Пусть $f \in L_2^r(D), r = 1,2, \ldots$ Имеем

$$\sum_{i=N}^{\infty} c_i^2(f) - \sum_{i=N}^{\infty} (1-h)^i c_i^2(f) = \sum_{i=N}^{\infty} (1-(1-h)^i) c_i^2(f) =$$
$$= \sum_{i=N}^{\infty} |c_i(f)|^{2-\frac{1}{k}} |c_i(f)|^{\frac{1}{k}} (1-(1-h)^i).$$

Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\sum_{i=N}^{\infty} c_i^2(f) \le \sum_{i=N}^{\infty} (1-h)^i c_i^2(f) +$$
$$+ \left(\sum_{i=N}^{\infty} c_i^2(f) \right)^{\frac{2k-1}{2k}} \left(\sum_{i=N}^{\infty} (1-(1-h)^i) c_i^2(f) \right)^{\frac{1}{2k}} =$$
$$= \sum_{i=N}^{\infty} (1-h)^i c_i^2(f) +$$
$$+ \left(\sum_{i=N}^{\infty} c_i^2(f) \right)^{\frac{2k-1}{2k}} \left(\sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^{2r}} (1-(1-h)^i)^{2k} \lambda_i^{2r} c_i^2(f) \right)^{\frac{1}{2k}} =$$
$$= (1-h)^N \sum_{i=N}^{\infty} c_i^2(f) +$$
$$+ \lambda_N^{-\frac{r}{k}} \left(\sum_{i=N}^{\infty} c_i^2(f) \right)^{\frac{2k-1}{2k}} \left(\sum_{i=N}^{\infty} (1-(1-h)^i)^{2k} \lambda_i^{2r} c_i^2(f) \right)^{\frac{1}{2k}},$$

то есть

$$\sum_{i=N}^{\infty} c_i^2(f) \le (1-h)^N \sum_{i=N}^{\infty} c_i^2(f) +$$
$$+ \lambda_N^{-\frac{r}{k}} \left(\sum_{i=N}^{\infty} c_i^2(f) \right)^{\frac{2k-1}{2k}} \Omega_k^{\frac{1}{k}}(D^r f, h).$$

Отсюда, очевидно, имеем

$$E_N(f) \le (1-(1-h)^N)^{-k} \lambda_N^{-r} \Omega_k(D^r f, h).$$

Легко показать, что для функции

$$f_*(x) = u_N(x), N = 1,2,\ldots$$

последнее неравенство обращается в равенство.

ТЕОРЕМА 4. Справедливо равенство

$$sup\{\|f - S_N(f))\| : f \in W^r(D)\} = \frac{1}{\lambda_N^r}$$
$$N = 1,2,\ldots, r = 1,2,\ldots.$$

Верхняя грань достигается для функции

$$f_N^*(x) = \frac{1}{\lambda_N^r} u_N(x).$$

Доказательство. Пусть $f \in W^r(D)$. Тогда, так как

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(f)\, u_i(x),\ c_i(f) = \int_a^b p(x) f(x) u_i(x) dx,$$

то в силу (4) и леммы 1 этого параграфа

$$\|f - S_N(f))\|^2 = \sum_{i \ge N} c_i^2(f) = \sum_{i \ge N} \frac{1}{\lambda_i^{2r}} c_i^2(D^r f) \le$$

$$\le \frac{1}{\lambda_N^r} \sum_{i \ge N} c_i^2(D^r f) \le \frac{1}{\lambda_N^r} \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2(D^r f) = \frac{1}{\lambda_N^r} \|D^r f\|^2 = \frac{1}{\lambda_N^r},$$

то есть

$$\|f - S_N(f))\| \le \frac{1}{\lambda_N^2}. \tag{6}$$

С другой стороны, для функции

$$f_N^*(x) = \frac{1}{\lambda_N^r} u_N(x),$$

очевидно, принадлежащей классу $W^r(D)$, имеем

$$\|f_N^* - S_N(f_N^*))\| = \frac{1}{\lambda_N^r}. \tag{7}$$

Из оценок (6), (7) следует требуемое равенство.

ТЕОРЕМА 5. Для любой функции $f \in L_2^r(D)$

$$\lim_{N \to \infty} \lambda_N^r \|f - S_N(f))\| = 0.$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 4 для любой функции $f \in L_2^r(D)$, имеем

$$\|f - S_N(f))\| \le \frac{1}{\lambda_N^r} \|D^r f\|.$$

Рассмотрим функцию

$$f^*(x) = f(x) - S_N(f; x).$$

Очевидно, что $f^* \in L_2^r(D)$ и

$$D^r f^*(x) = D^r f(x) - D^r S_N(f; x) =$$

$$= D^r f(x) - D^r \left(\sum_{1 \le i < N} c_i(f)\, u_i(x) \right) =$$

$$= D^r f(x) - \sum_{1 \le i < N} \lambda_i^r c_i(f)\, u_i(x) = D^r f(x) - S_N(D^r f; x),$$

то есть

$$D^r f^*(x) = D^r f(x) - S_N(D^r f; x),$$

кроме того,

$$S_N(f^*; x) = 0.$$

Следовательно,

$$\|f - S_N(f)\| = \|f^*\| = \|f^* - 0\| = \|f^* - S_N(f^*)\| \le$$

$$\le \frac{1}{\lambda_N^r} \|D^r f^*\| = \frac{1}{\lambda_N^r} \|D^r f - S_N(D^r f)\| = \frac{1}{\lambda_N^r} \gamma_N.$$

Так как $\gamma_N \to 0$ $(n \to \infty)$, то теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6. Справедливо равенство

$$d_{N-1}(W^r(D), L_2) = \frac{1}{\lambda_N^r}, r = 1,2, \dots; N = 2,3, \dots.$$

Доказательство. Пусть $f \in W^r(D)$. Тогда, как и при доказательстве предыдущей теоремы, имеем

$$\|f - S_N(f)\|^2 = \sum_{i \ge N} c_i^2(f) = \sum_{i \ge N} \frac{1}{\lambda_i^{2r}} c_i^2(Df) \le \frac{1}{\lambda_N^{2r}} \sum_{i \ge N} c_i^2(D^r f) \le$$

$$\le \frac{1}{\lambda_N^{2r}} \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2(D^r f) \le \frac{1}{\lambda_N^{2r}} \|D^r f\|^2 \le \frac{1}{\lambda_N^{2r}},$$

то есть

$$\|f - S_N(f)\| \le \frac{1}{\lambda_N^r}.$$

Отсюда следует, что

$$d_{N-1}(W^r(D), L_2) \le \frac{1}{\lambda_N^r}. \qquad (8)$$

Рассмотрим в N – мерном подпространстве G_N полиномов

$$Q_N(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i u_i(x)$$

шар γB радиуса $\gamma = \frac{1}{\lambda_N^r}$, т.е. множество таких полиномов

$$\|Q_N\|^2 = \sum_{i=1}^{N} a_i^2 \le \frac{1}{\lambda_N^{2r}}$$

и покажем, что $\gamma B \subset W^r(D)$. Пусть $Q_N \in \gamma B$. Так как

$$D^r Q_N(x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^r a_i u_i(x),$$

то

$$\|D^r Q_N\|^2 = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^{2r} a_i^2 \le \lambda_N^{2r} \cdot \frac{1}{\lambda_N^{2r}} = 1,$$

то есть

$$\|D^r Q_N\| \le 1.$$

Отсюда следует, что $Q_N \in W^r(D)$, а это означает, что $\gamma B \subset W^r(D)$. Тогда в силу известной теореме о поперечнике шара ($[5]$, с. 342) имеем

$$d_{N-1}(W^r(D), L_2) \ge \frac{1}{\lambda_N^r}. \qquad (9)$$

Из оценок (8) и (9) следует требуемое равенство.

ТЕОРЕМА 7. Справедливо равенство

$$d_{N-1}(W_k^r(\Phi), L_2) = \lambda_N^{-r}[1-(1-h)^N]^{-k}\Phi(h)$$
$$(h \in (0,1), k = 1,2,\dots, N = 2,3,\dots).$$

Доказательство. Так как сумма $S_N(f;x)$ содержит $N-1$ линейно независимых функций, то из теоремы 3 следует, что

$$d_{N-1}(W_k^r(D,\Phi), L_2) \le \lambda_N^{-r}[1-(1-h)^N]^{-k}\Phi(h). \qquad (10)$$

Рассмотрим теперь в N – мерном подпространстве полиномов

$$Q_N(x) = \sum_{1 \le i \le N} a_i u_i(x)$$

шар γB радиуса $\gamma = \lambda_N^{-r}[1-(1-h)^N]^{-k}\Phi(h)$, т.е. множество полиномов $Q_N(x)$, для которых

$$\|Q_N\|^2 = \sum_{1 \le i \le N} a_i^2 \le \lambda_N^{-2r}[1-(1-h)^N]^{-2k}\Phi^2(h).$$

Покажем, что $\gamma B \subset W_k^r(D,\Phi)$. Пусть $Q_N \subset \gamma B$, так как

$$D^r Q_N(x) = \sum_{1 \le i \le N} \lambda_i^r a_i u_i(x),$$

то, как и выше,

$$\left\|\Delta_h^k(D^r f)\right\|^2 = \sum_{1 \le i \le N} \lambda_i^{2r}[1-(1-h)^i]^{2k} a_i^2 \le \lambda_N^{2r}[1-(1-h)^N]^{2k} \sum_{1 \le i \le N} a_i^2 \le$$
$$\le \lambda_N^{2r}[1-(1-h)^N]^{2k} \cdot \lambda_N^{-2r}[1-(1-h)^N]^{-2k}\Phi^2(h) = \Phi^2(h),$$

то есть

$$\left\|\Delta_h^k(D^r f)\right\| \le \Phi(h).$$

Отсюда следует, что $Q_N \in W_k^r(\Phi)$. Следовательно, как и при доказательстве предыдущей теоремы

$$d_{N-1}(W_k^r(\Phi)) \ge \gamma. \qquad (11)$$

Из оценок (10) и (11) следует требуемое равенство.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В работе мы дали ряд точных оценок скорости сходимости (наилучших приближений) ряда Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля на классах функций, характеризующихся обобщенным модулем непрерывности.

2. В математической физике часто встречается задача на собственные функции для оператора Лапласа

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \text{ (в области } G), \\ u|_{\partial G} = 0, \end{cases}$$

где G – произвольная N – мерная область, ∂G – ее граница, причем краевое условие первого рода $u|_{\partial G} = 0$ может быть заменено каким-либо другим краевым условием, например условием

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right]\Big|_{\partial G} = 0.$$

Известно, что эта задача имеет полную ортонормированную $L_2(G)$ систему собственных функций $u_k(x), k = 1,2, \ldots$, отвечающих последовательности собственных значений $\lambda_k,\ k = 1,2, \ldots$

3. Нетрудно видеть, что полученные выше результаты можно распространить и на ряды Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) u_k(x), \quad c_k(f) = \int_G f(x) u_k(x)\, dx, \qquad k = 1,2, \ldots$$

4. Аналогичные методы для нахождения точных оценок скорости сходимости (наилучших приближений) сумм Фурье по тригонометрической системе в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ нами были использованы в работе [6].

5. В настоящей работе при определении классов функций и при доказательствах теорем, сформулированных выше, мы пользовались методами из работ [7] – [9].

Список литературы / References

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527с.
2. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
3. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969. 455 с.
4. *Колмогоров А.Н.* Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1987. 470с.
5. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближений. М.: Наука, 1987. 424 с.
6. *Керимов М.К., Селимханов Э.В.* О точных оценках скорости сходимости рядов Фурье для функций одной переменной в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$// Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2016. Т. 56. № 5. С. 730-741.
7. *Рафальсон С.З.* Наилучшее приближение функций в метриках алгебраическими многочленами и коэффициенты Фурье по ортогональным многочленам // Вестник Ленинг. гос. ун-та. Серия механ. и матем., 1969. № 7. С. 68–79.
8. *Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К.* Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам в пространстве $L_2\big((a, b)p(x)\big)$ // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2009. Т. 49. № 6. С. 966-980.
9. *Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К.* О точных оценках скорости сходимости двойных рядов Фурье-Бесселя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2017. Т. 57. № 11. С. 1-6.