МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СТРУКТУР В СЛУЧАЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Белкин А.Э. Email: Belkin646@scientifictext.ru

Белкин Антон Эдуардович – бакалавр,
кафедра прикладной математики и информатики,
Тульский государственный университет, Тула

Аннотация: *в статье приведено определение функциональной структуры как пары, состоящей из множества и его преобразования. Поставлена задача обобщения понятия функциональной структуры с помощью рассмотрения многозначных отображений. Выявлена проблема, состоящая в том, что полученная структура не является графом, в отличие от функциональной структуры. Предложено 2 способа решения данной проблемы, каждый из которых представляет собой независимый метод исследования обобщения функциональной структуры. Описаны преимущества и недостатки данных методов. Показано, что между многозначными преобразованиями множества и однозначными преобразованиями его булеана определённого вида существует взаимно однозначное соответствие.*

Ключевые слова: *преобразование, отображение, многозначность, множество, булеан, орграф, отношение, биекция, обобщение, функциональная структура.*

METHODS OF FUNCTIONAL STRUCTURE INVESTIGATION IN THE CASE OF MULTIPOTENT MAPPINGS

Belkin A.E.

Belkin Anton Eduardovich – Bachelor,
DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE,
TULA STATE UNIVERSITY, TULA

Abstract: *the article gives definition of the functional structure as a pair consisting of a set and its transformation, formulates the problem of generalizing the concept of a functional structure with the help of consideration of multivalued mappings. The problem is that the obtained structure is not a graph, in contrast to a functional structure. The article proposes two ways of solving this problem, each of which is an independent method for studying the generalization of the functional structure, and describes advantages and disadvantages of these methods. It is shown that there exists a one-to-one correspondence between the multivalued transformations of the set and the single-valued transformations of its Boolean of a definite type.*

Keywords: *transformation, mapping, multivaluedness, set, boolean, digraph, relation, bijection, generalization, functional structure.*

УДК 510.8

Под функциональной структурой (ФС) в данной статье понимается ориентированный граф вида (A, f), где A – некоторое непустое множество, $f: A \to A$ – его преобразование. Преобразования являются в каком-то смысле простейшими отображениями, так как они ставят в соответствие каждому элементу множества элемент этого же множества. Особенностью функциональных структур как графов является то, что из каждой вершины ФС выходит ровно одна дуга. Данное свойство можно считать определением ФС, так как только они обладают им. Из этого свойства следует ряд следствий, которые подробно описаны в статье [1]. Хотя любое отображение представимо в виде ориентированного графа (если в качестве множества вершин взять объединение областей определения и значений отображения), именно преобразования благодаря обладанию выше упомянутым свойством удобны для формулировки утверждений на теоретико-графовом языке. Однако, многие отображения, близкие к преобразованиям, не являются таковыми в строгом смысле и не допускают использование аппарата функциональных структур. Имеет смысл рассмотреть обобщение таких структур путём расширения рассматриваемого класса отображений. Первым шагом может быть рассмотрение многозначных отображений.

Пусть A – некоторое непустое множество, $g: A \to 2^A$ – многозначное преобразование. Здесь 2^A – булеан множества A, то есть множество всех его подмножеств. Многозначное преобразование ставит в соответствие каждому элементу множества A не другой элемент этого же множества, а некоторое подмножество A. По этой причине нельзя рассматривать пару (A, g) как граф, что очень неудобно в плане исследования данной конструкции как обобщения функциональной структуры. Существует 2 простейших способа построения графа из этой конструкции.

Способ 1. Замена отображения g отношением более общего вида. Вводится бинарное отношение "$\to$" на множестве A. Два элемента $a_1, a_2 \in A$ находятся в отношении $a_1 \to a_2$ тогда и только тогда, когда $a_2 \in g(a_1)$. Тогда пара $(A, \to)$ является ориентированным графом, отражающим структуру отображения g (каждому отображению g можно взаимно однозначно поставить в соответствие отношение " $\to$ "). Заметим, что, хотя $(A, \to)$ является графом, он не является функциональной структурой, так как " $\to$ " – не отображение. То есть, это орграф общего вида.

Способ 2. Замена множества A его булеаном. Рассматривается отображение $h: 2^A \to 2^A$ такое, что $h(B) = \bigcup_{a \in B} g(a)$. Пара $(2^A, h)$ является ориентированным графом, отражающим структуру отображения g. В отличие от $(A, \to)$, пара $(2^A, h)$ является функциональной структурой, так как h – преобразование множества 2^A.

Каждый из указанных выше способов имеет свои преимущества и недостатки. С точки зрения удобства, предпочтительнее способ 1, так как он позволяет работать непосредственно с множеством A, и вершинами графа $(A, \to)$ являются элементы этого же множества. Однако, тот факт, что $(A, \to)$ не является функциональной структурой, не позволяет применить к нему утверждения из [1]. Функциональной структурой является пара $(2^A, h)$, и в этом главное преимущество второго подхода.

Важным аргументом в пользу выбора одного из способов обобщения функциональной структуры является тот факт, существует ли взаимно однозначное соответствие между отображением g и графами, описанными в способах 1 и 2. Как указано выше, каждому отображению g можно взаимно однозначно поставить в соответствие отношение " $\to$ ". Можно показать, что то же самое верно и для отображений h. Для этого сформулируем и докажем теорему.

Утверждение. Пусть A – произвольное непустое множество, G_A – множество всевозможных отображений $g: A \to 2^A$. Обозначим H_A множество всевозможных отображений $h: 2^A \to 2^A$ таких, что $h(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i h(A_i)$. Тогда отображение $\tau: G_A \to H_A$, где $(\tau g)(B) = \bigcup_{a \in B} g(a)$, является биекцией.

Доказательство. Для начала покажем, что оператор τ – инъекция. Пусть $g_1, g_2 \in G_A$, $g_1 \neq g_2$. Это значит, что $\exists a \in A: g_1(a) \neq g_2(a)$. Обозначим $B = \{a\}$. Тогда $(\tau g_1)(B) = g_1(a) \neq g_2(a) = (\tau g_2)(B)$. Следовательно, $\tau g_1 \neq \tau g_2$, и τ – инъекция.

Осталось показать, что τ – сюръекция. Пусть дано произвольное отображение $h: 2^A \to 2^A$ такое, что $h(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i h(A_i)$. Требуется показать, что оно является образом по крайней мере одной функции $g \in G_A$. Выберем функцию g так, что $\forall a \in A: g(a) = h(\{a\})$. Пусть B – произвольное подмножество A. $(\tau g)(B) = \bigcup_{a \in B} g(a) = \bigcup_{a \in B} h(\{a\}) = h(\bigcup_{a \in B} \{a\}) = h(B)$. Таким образом, $\tau g = h$, и τ – сюръекция.

Так как τ является сюръекцией и инъекцией, то τ – биекция. **Утверждение доказано.**

Доказанное выше утверждение играет решающую роль в выборе способа исследования многозначных преобразований: оно позволяет ввести взаимно однозначное соответствие между множеством структур, основанных на многозначных преобразованиях множества, и множеством функциональных структур на булеане данного множества. Следовательно, исследование с помощью утверждений статьи [1] любого преобразования h булеана, удовлетворяющего условию $h(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i h(A_i)$, соответствует исследованию одного определённого многозначного преобразования множества, причём для каждого такого многозначного преобразования существует единственное преобразование h. Таким образом, приведён пример обобщения методов исследования функциональных структур для случая многозначных отображений.

Список литературы / References

1. *Белкин А.Э., Бирюков Д.Р.* Свойства преобразований множеств // Современные проблемы математики, механики, информатики: материалы Региональной научной студенческой конференции. (Россия, Тула, 26-28 апреля 2017) Тула: ТулГУ, 2017. С. 10-20.
2. *Бурбаки Н.* Основания математики. Логика. Теория множеств. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. 292 с.
3. *Акимов О.Е.* Дискретная математика. Логика. Группы. Графы. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. 352 с.
4. *Зыков А.А.* Основы теории графов. М.: Наука, 1987. 384 с.