

ЗАПИСЬ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОЙ ИНФОРМАЦИИ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В РЕЗУЛЬТАТЕ ДИФРАКЦИИ НА ФРАКТАЛЬНОЙ МАСКЕ

Русанова И.А. Email: Rusanova636@scientifictext.ru

*Русанова Инна Александровна – старший преподаватель,
кафедра общей физики,
Институт физики
Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань*

Аннотация: данная работа посвящена численному моделированию записи и восстановления амплитудно-фазовой информации волнового поля на транспаранте (маске) с фрактальным рельефом, задаваемым функцией Вейерштрасса-Мандельброта. Выявлено, что пространственное распределение фазы волнового поля дифракции Фраунгофера обладает свойствами самоподобия. Детали неоднородной структуры вносят существенный вклад в суммарную амплитуду на высоких пространственных частотах. Показано, что с ростом фрактальной размерности фрактальной маски вклад максимальных значений амплитудного распределения волнового поля на пространственных частотах уменьшается. Постепенное увеличение вклада в суммарную амплитуду наблюдается у минимальных значений, что согласуется с характерными особенностями фрактальной неоднородности поверхности, задаваемой косинусной фрактальной функцией Вейерштрасса-Мандельброта. Исследование фрактальных масок в качестве пространственных фильтров повышает чувствительность к амплитудным и фазовым искажениям исследуемого объекта и представляет интерес при разработке оптических систем распознавания сложных неоднородных структур с быстро меняющейся фазовой информацией.

Ключевые слова: фрактал, дифракция Фраунгофера, амплитудно-фазовая информация, транспарант, Фурье-преобразование.

RECORDING AND RESTORING THE AMPLITUDE AND PHASE INFORMATION OF THE WAVE FIELD AS A RESULT OF DIFFRACTION ON FRACTAL MASK Rusanova I.A.

*Rusanova Inna Aleksandrovna - Senior Lecturer,
DEPARTMENT OF GENERAL PHYSICS,
INSTITUTE OF PHYSICS
KAZAN FEDERAL UNIVERSITY, KAZAN*

Abstract: this work is devoted to the numerical modeling of the recording and restore the amplitude and phase information of the wave field on header (mask) with a fractal relief given by Weierstrass-Mandelbrot function. It was found that the spatial distribution of the phase of the wave field Fraunhofer diffraction has the properties of self-similarity. Details inhomogeneous structures make a significant contribution to the total amplitude of the high spatial frequencies. It is shown that with the increase of fractal dimension of fractal mask the contribution of the maximum values of the amplitude distribution of the wave field on the spatial frequencies is reduced. The gradual increase in the contribution to the total amplitude observed at the minimum values, which is consistent with the characteristic features of fractal neodymium-homogeneity of the surface defined by the cosine function of the fractal Weierstrass-Mandelbrot. The study of fractal mask as a spatial filter increases the sensitivity to amplitude and phase distortions of the object and represents the interest in the development of optical recognition systems of the inhomogeneous complex family structures with rapidly changing the phase information.

Keywords: fractal, Fraunhofer diffraction, the amplitude and phase information, header, Fourier transform.

УДК: 535.2+535.317.1

Введение

В настоящее время большое внимание уделяется оптическим методам обработки информации. Преимущества быстродействующих логических когерентно-оптических и лазерных устройств обработки информации связаны с их простотой, компактностью, быстродействием, возможностями легкой обработки больших массивов двумерной и многоканальной информации при наличии высокой помехоустойчивости [1, 2].

В оптических системах обработки и распознавания изображений представляет интерес возможность преобразования фазовой информации об объекте в амплитудную, что позволяет производить частотно-фазовую фильтрацию волновых фронтов в случае многоканальной обработки большого массива данных, несущих информацию об объектах с заданными фазовыми характеристиками. Формирование спектра

амплитудно-фазового распределения в когерентно-оптических системах задается транспарантом (маской), осуществляемое двумерным Фурье-преобразованием. Поскольку обычные методы ввода информации в когерентно-оптическую систему обладают низкой оперативностью, разрабатываются методы поиска и исследования сред и материалов, обладающих более высокими характеристиками. Наиболее перспективные методы получения действительного распределения основаны не на транспарантах с заданной прозрачностью по интенсивности (термопластические и фототермопластические пленки, фотохромные материалы, пространственные модуляторы на кристаллах и жидкостях), а на перспективных методах получения фазового распределения, за счёт, например, неоднородно-переменной поверхности фазового транспаранта с переменной прозрачностью. Комбинации фазовых и амплитудных транспарантов используются для дифференцирования изображений, компенсации aberrаций оптических систем в фазо-контрастном методе Цернике [1, 2].

Моделирование дифракции на плоских амплитудных неоднородных структурах актуально для исследований многочисленных видов объектов, обладающих фрактальными свойствами. Проведенные ранее исследования [3-8] показали, что дифракционная картина в области дифракции Фраунгофера от фрактальной структуры также является фрактальной, и существует связь между величинами их фрактальных размерностей. В работе [7] была исследована обратная задача определения фрактальной размерности фрактальной маски по дифракционной картине.

Моделирование записи и восстановления амплитудно-фазовой информации волнового поля на транспаранте с фрактальным рельефом

Кодируемая информация об исследуемом объекте может вноситься в волновой фронт. Визуализация фазового (прозрачного) объекта возможна путем перевода его в пространственную модуляцию интенсивности и (или) фазы волнового поля. Воспользуемся моделью наиболее простого случая оптического преобразования Фурье (голограмма Фурье). Пусть фазовый транспарант с переменной прозрачностью имеет коэффициент пропускания по амплитуде $b'(x, y)$, заданный фрактальной функцией Вейерштрасса-Мандельброта $W(t)$ с фрактальной размерностью D (Рис. 2):

$$W(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - e^{ib^n t}) e^{i\varphi_n}}{b^{(2-D)n}}. \quad (1)$$

Воспользуемся действительной частью функции $W(t)$ (косинусная фрактальная функция (Рис. 1)):

$$C(t) = \text{Re}W(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos b^n t)}{b^{(2-D)n}}. \quad (2)$$

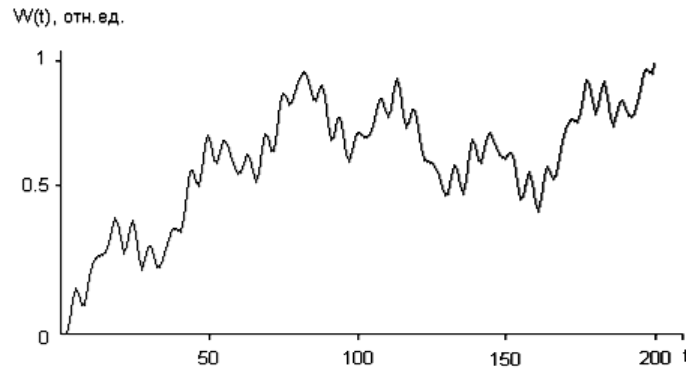


Рис. 1. Косинусная фрактальная функция Вейерштрасса-Мандельброта $D=1.5$, $b=0.5$, $n_1=-10$, $n_2=10$, $t=200$

На транспарант с заданной комплексной прозрачностью $H(p, q)$ модифицирующий спектр, подается лазерное когерентное монохроматическое излучение с плоским фронтом. Линейные размеры поверхности транспаранта значительно больше длины волны падающего света. После обратного преобразования, совершаемого второй линзой, регистрируемое распределение волнового поля $\hat{A}_0$ в плоскости (ξ, η) будет иметь вид

$$\tilde{A}_0(\xi, \eta) = A_0 \iint_{(x, y)} b'(x, y) T_z(x, y, \xi, \eta) dx dy, \quad (3)$$

где $b'(x, y) = |b'(x, y)| e^{i\beta(x, y)}$. Используем оптическое преобразование Фурье. Двумерное оптическое преобразование Фурье приводит к следующей зависимости $T_z(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{\lambda z} e^{i(2\pi/\lambda z)(x\xi + y\eta)}$

, где z - фокусное расстояние линзы, λ - длина плоской волны [5,6]. Регистрируемое волновое поле за плоскостью транспаранта можно представить в виде распределения:

$$\tilde{A}_0(\xi, \eta) = \frac{A_0}{\lambda z} \iint_{(x, y)} b'(x, y) e^{i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta)} dx dy = \frac{A_0}{\lambda z} \iint_{(x, y)} c(t) e^{i2\pi(px + qy)} dx dy \equiv \frac{1}{\lambda z} H(p, q),$$

где $p = \frac{\xi}{\lambda z}$ и $q = \frac{\eta}{\lambda z}$ - пространственно-частотные переменные, определяемые координатами в плоскости спектра (x, y) , $H(p, q)$ - комплексный спектр функции $b'(x, y)$. Амплитудное распределение $A(p, q)$ определим выражением:

$$A(p, q)^2 = (\operatorname{Re} H(p, q))^2 + (\operatorname{Im} H(p, q))^2, \\ H(p, q) + H^*(p, q) = A(p, q)(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = A(p, q)2\cos\varphi, \quad (4)$$

где $H^*(p, q)$ - сопряженная величина комплексному спектру от функции $b'(x, y)$. Фазовое распределение волнового поля будет иметь вид:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\operatorname{Re} H(p, q)}{A(p, q)}\right). \quad (5)$$

Результаты численного моделирования

Пространственные распределения амплитуды и фазы волнового поля, полученные на фрактальной поверхности транспаранта, представлены на Рис. 2 (I) и Рис. 2 (II) соответственно. Согласно законам Фурье-оптики, линейное Фурье-преобразование от фрактальной функции зрачка является фракталом дополнительной размерности [9]. В области дифракции Фраунгофера (задняя фокальная плоскость идеализированной оптической системы) спектр интенсивности волнового поля на пространственных частотах, полученный на фрактальной маске, также характеризуется фрактальными свойствами [3-8].

Мерой пространственной неоднородности структуры корреляционных взаимосвязей служит её фрактальная размерность D , количественно характеризующая степень заполнения пространства. В основу обработки параметров положен алгоритм фрактально-множественного описания экспериментальных данных, на основе общеизвестного подхода Б. Мандельброта, имеющего вид

$$D = \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{R}\right)} = \frac{\ln N(b)}{\ln b}, \quad (6)$$

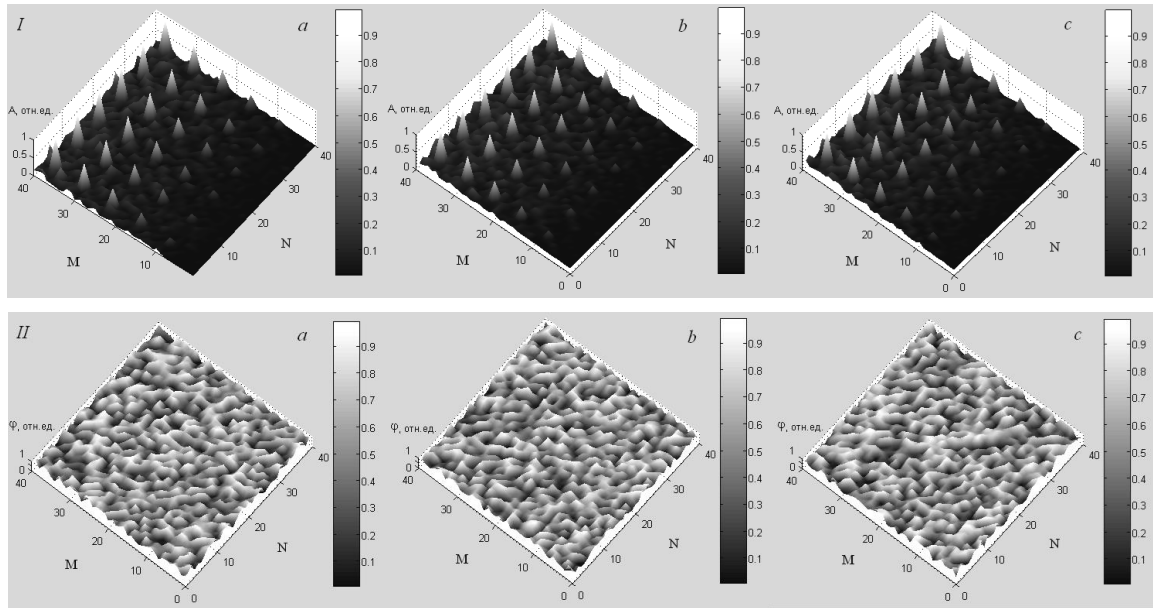


Рис. 2. Спектры распределения амплитуды (I) и фазы (II) волнового поля на пространственных частотах, полученные на фрактальной поверхности транспаранта ($D_a = 2.1$, $D_b = 2.5$, $D_c = 2.9$, M, N – количество элементов дискретизации в плоскости исследуемого объекта)

где b – размер одинаковых частей, N – количество одинаковых частей в масштабе. Для того, чтобы покрыть структуру в m - мерном фазовом пространстве, подсчитывается $N(b)$ m - мерных ячеек со стороной b , так чтобы выполнялось условие Хаусдорфовой размерности $N(b) \sim b^{-D}$, при $b \rightarrow 0$ [10]. В рабочей программе был создан алгоритм по подсчету не количества кубиков, укладываемых в пространственную структуру объекта, а количества свободных, не перекрывающихся граней поверхностей (Рис.3). Такие объекты имеют фрактальную структуру, если измеряемая клеточная фрактальная размерность изменяется в пределах $2 < D < 3$ [11,12]. Проведенные расчеты показали, что фазовое распределение волнового фронта обладает свойствами самоподобия и характеризуется фрактальной размерностью $D = 2.3125 \pm 0.1875$, с погрешностью определения размерности, не превышающей 4% (Рис. 3) [9-12].

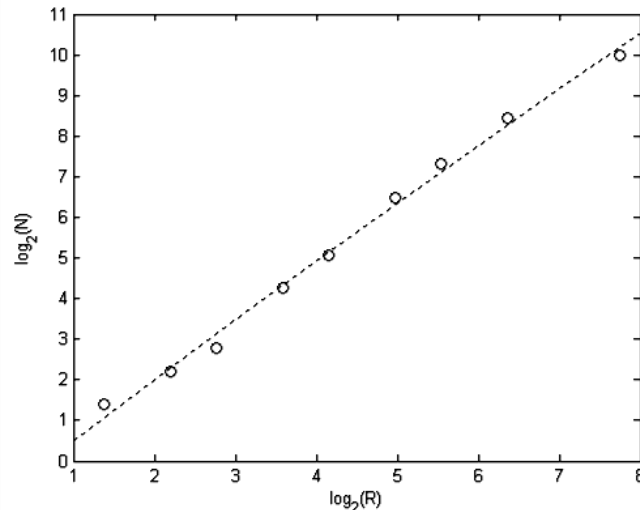


Рис. 3. График зависимости фазового распределения волнового поля от размера грани кубов для фрактала с $D = 2.5$ (косинусная фрактальная функция Вейерштрасса-Мандельброта)

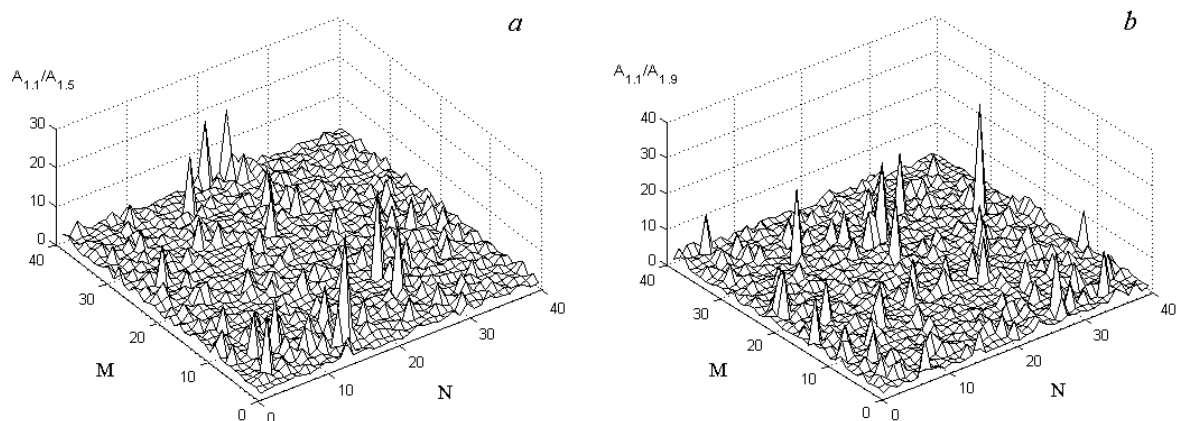


Рис. 4. Отношение амплитудных распределений волновых полей на пространственных частотах A_{D_i} / A_{D_j} , несущих информацию о неоднородных свойствах фрактальных масок (D_i и D_j - фрактальные размерности транспарантов, M, N - количество элементов дискретизации в плоскости исследуемого объекта)

На Рис. 4 представлены отношения амплитудных распределений волновых полей на пространственных частотах в зависимости от фрактальной маски транспаранта. Детали неоднородной структуры вносят существенный вклад в суммарную амплитуду на высоких пространственных частотах. Показано, что с ростом фрактальной размерности фрактальной маски вклад максимальных значений амплитудного распределения волнового поля на пространственных частотах $A_{\max}(p, q)$ уменьшается.

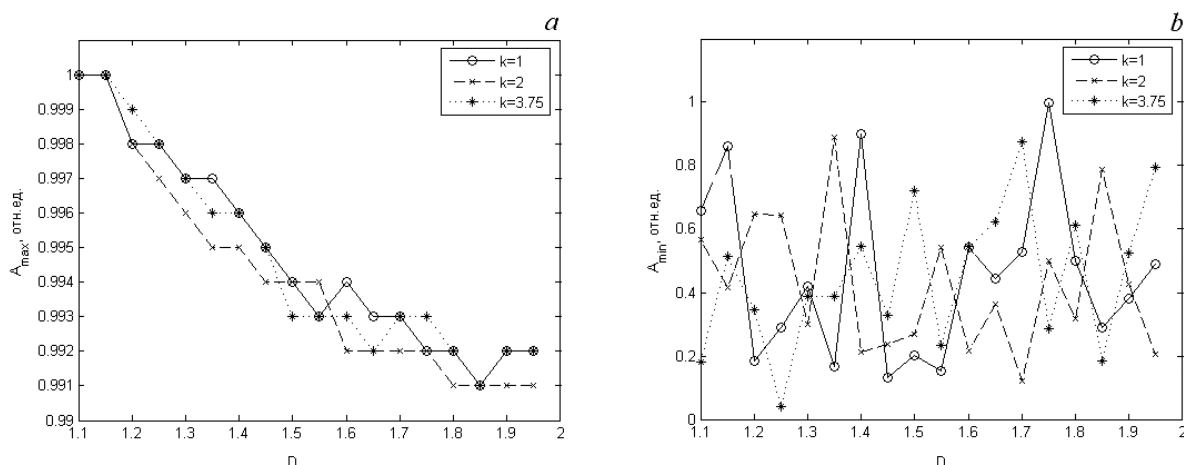


Рис. 5. Зависимость максимальных $A_{\max}(p, q)$ (a) и минимальных $A_{\min}(p, q)$ (b) значений амплитудного распределения волнового поля на пространственных частотах в зависимости от фрактальной размерности D фрактальной маски (k - соотношение линейных размеров области регистрации распределения волнового поля на фрактальной маске и экране)

Постепенное увеличение вклада в суммарную амплитуду на фоне «фрактального шума» наблюдается у минимальных значений $A_{\min}(p, q)$, что согласуется с характерными особенностями фрактальной неоднородности поверхности, задаваемой косинусной фрактальной функцией Вейерштрасса-Мандельброта (Рис. 5). Наблюдаемые зависимости демонстрирует высокую чувствительность амплитудно-фазовой информации волнового поля на пространственных частотах к быстро меняющимся неоднородностям фрактальной маски, несущим информацию о мелких хаотичных включениях, заданным косинусной фрактальной функцией Вейерштрасса-Мандельброта.

Выводы

Детали неоднородной структуры вносят существенный вклад в суммарную амплитуду на высоких пространственных частотах. Показано, что с ростом фрактальной размерности фрактальной маски вклад максимальных значений амплитудного распределения волнового поля на пространственных частотах уменьшается. Постепенное увеличение вклада в суммарную амплитуду наблюдается у минимальных значений, что согласуется с характерными особенностями фрактальной неоднородности поверхности, задаваемой косинусной фрактальной функцией Вейерштрасса-Мандельброта.

Список литературы / References

1. *Потанов А.А.* Фракталы, скейлинг и дробные операторы в физике и радиотехнике // Радиотехника. Наносистемы. Информационные технологии, 2009. № 1-2. Т. 1. С. 64-108.
2. *Harold G. Andrews II, Mark A. Gerbehead* / Optical correlator optimizations and extensions for automated optical target recognition. New York: Rome Laboratory Project Engineer, 1995. 41 p.
3. *Uozumi J., Kumura H., Asakura T.* Fraunhofer diffraction by Koch fractals // Journal of Modern Optics, 1990. Vol. 37. № 6. P. 1011–1031.
4. *Uno K., Uozumi J., Asakura T.* Stastical propereties of the Fraunhofer diffraction field produced by random fractals // Applied Optics, 1993. Vol. 32. № 15. P. 2722–2729.
5. *Hou B., Xu G., Wen W., Wong G.* Diffraction by an optical fractal grating // Appl. Phys. Letters, 2004. Vol. 85. № 25. P. 6125–6127.
6. *Rodrigo J., Alieva T., Calvo M.* Diffraction by Cantor fractal zone plates // Journal of Modern Optics, 2005. Vol. 52. № 18. P. 2771–2783.
7. *Зинчик А.А., Музыченко Я.Б., Смирнов А.В., Стафеев С.К.* Использование фрактальных масок для визуализации оптических неоднородностей при оптической обработке искаженного изображения // Оптический журнал, 2003. 70. № 11. С. 49-52.
8. *Боголюбов А.Н., Петухов А.А., Шапкина Н.Е.* Оптическая дифракция на фрактальных решетках // Вестник МГУ. Серия 3. Физика, 2008. № 2. С. 7–10.
9. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1970. 856 с.
10. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
11. *Русанова И.А.* Преобразование фазовой информации в эхо-голографии // Необратимые процессы в природе и технике: седьмая Всероссийская конференция (Москва, 29-31 января 2013). Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. С. 222-225.
12. *Rusanova I.A.* Study of fractal structure of images of nail bed and periungual epithelium // Biomedical Engineering, 2013. Vol. 47. № 2. P. 83-85.