# Исследование разрешимости краевой задачи для линейной модели Филлипса-Гудвина динамики ЧВП
# Окунцева А. Ю.

*Окунцева Альбина Юрьевна / Okuntseva Albina Yuryevna – студент,*
*кафедра прикладной математики,*
*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования*
*Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь*

***Аннотация:*** *в статье рассмотрена модель Филлипса-Гудвина динамики ЧВП о $\omega$ - кратном изменении ЧВП к конечному моменту времени. И изучена краевая задача для этой модели.*
***Ключевые слова:*** *модель Филлипса-Гудвина динамики ЧВП, краевая задача, динамика ЧВП.*

*УДК 517.929; 517.67*

Рассмотрим линейную модель Филлипса-Гудвина динамики ЧВП:

$$TY'(t)+Y\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right)=cY(t)+BY'(t)+A(t)+\eta(t),\ t\in[0,nT].$$

Проведем некоторые преобразования:

$$(T-B)Y'(t)+Y\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right)-cY(t)=A(t)+\eta(t)\quad\Big|\times\frac{1}{T-B}.$$

$$Y'(t)+\frac{1}{T-B}Y\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right)-\frac{c}{T-B}Y(t)=\frac{A(t)+\eta(t)}{T-B}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{1}{T-B}=p,\ -\frac{c}{T-B}=q,\ \frac{A(t)+\eta(t)}{T-B}=f(t).$$

Тогда модель примет вид:

$$Y'(t)+pY\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right)+qY(t)=f(t).$$

Рассмотрим краевую задачу для линейной модели Филлипса-Гудвина динамики ЧВП об $\omega$ - кратном изменении ЧВП к конечному моменту времени[3]:

$$Y'(t)+pY\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right)+qY(t)=f(t),\ t\in[0,nT],\qquad(1)$$

$$Y(nT)=\omega Y(0).\qquad(2)$$

Краевое условие (2) при $\psi=1-\omega,\ \varphi=1,\ \beta=0$ и отражает рост ЧВП в $\omega$ раз по отношению к начальному периоду.

Подберем функцию $u(t)$ такую, что $u(0)\neq 0,\ lu=1$. Пусть $u(t)$ имеет вид:

$$u(t)=\frac{t\omega+nT}{nT}.\qquad(3)$$

Тогда $u(0)=1\neq 0$, $lu=\dfrac{nT\omega+nT}{nT}-\omega=1$, и функция $u(t)$, определенная равенством (3).

Пусть $n=3,\ T=1$. Тогда краевая задача (1) – (2) примет вид:

$$Y'(t)+pY([t])+qY(t)=f(t),\ t\in[0,3],\qquad(4)$$

$$Y(3)=\omega Y(0).\qquad(5)$$

Краевую задачу (4) – (5) можно свести к интегральному уравнению[1]:

$$Y'(t)+B(t)Y(0)=z(t),$$

где $B(t) = -\frac{u'(t)}{u(0)} = -\frac{\omega}{3}$.

Краевая задача (4) – (5) однозначно разрешима. Подставив $u(t)$ и $\beta$ получим:

$$Y(t) = \int_0^3 W(t,s) z(s) ds, \qquad (6)$$

где $W(t,s)$ определено равенством: $W(t,s) = \begin{cases} -\frac{t\omega}{3}, & 0 \le s \le t \le 3, \\ -\frac{t\omega}{3} - 1, & 0 \le t < s \le 3. \end{cases}$

Применим к исходному уравнению (4) «$W$ - подстановку»[1]:

$$Y'(t) + B(t)Y(0) = -pY([t]) - qY(t) + B(t)Y(0) + f(t).$$

$$z(t) = -pY([t]) - qY(t) + B(t)Y(0) + f(t).$$

$$z(t) = -p\int_0^3 W([t],s)z(s)ds - q\int_0^3 W(t,s)z(s)ds + B(t)\int_0^3 W(0,s)z(s)ds + f(t). \quad (7)$$

$$W([t],s) = \begin{cases} -\frac{[t]\omega}{3}, & 0 \le s \le [t] \le 3, \\ -\frac{[t]\omega}{3} - 1, & 0 \le [t] < s \le 3, \end{cases} \qquad W(0,s) = \begin{cases} 0, & 0 \le s \le 0 \le 3 \Rightarrow s = 0, \\ -1, & 0 < s \le 3. \end{cases}$$

С учетом этого уравнение (7) запишется в виде:

$$z(t) = -p\int_0^{[t]} W([t],s)z(s)ds - p\int_{[t]}^3 W([t],s)z(s)ds - q\int_0^t W(t,s)z(s)ds - q\int_t^3 W(t,s)z(s)ds -$$

$$-\frac{\omega}{3}\int_0^3 W(0,s)z(s)ds + f(t).$$

$$z(t) = p\int_0^3 \left(\frac{[t]\omega}{3}\right)\chi_1(t,s)z(s)ds + p\int_0^3 \left(\frac{[t]\omega}{3} + 1\right)\chi_2(t,s)z(s)ds + q\int_0^3 \left(\frac{t\omega}{3}\right)\chi_3(t,s)z(s)ds +$$

$$+q\int_0^3 \left(\frac{t\omega}{3} + 1\right)\chi_4(t,s)z(s)ds + \frac{\omega}{3}\int_0^3 z(s)ds + f(t).$$

На рисунках (1) – (4) представлен вид функций $\chi_i(t,s),\ i = \overline{1,4}$.

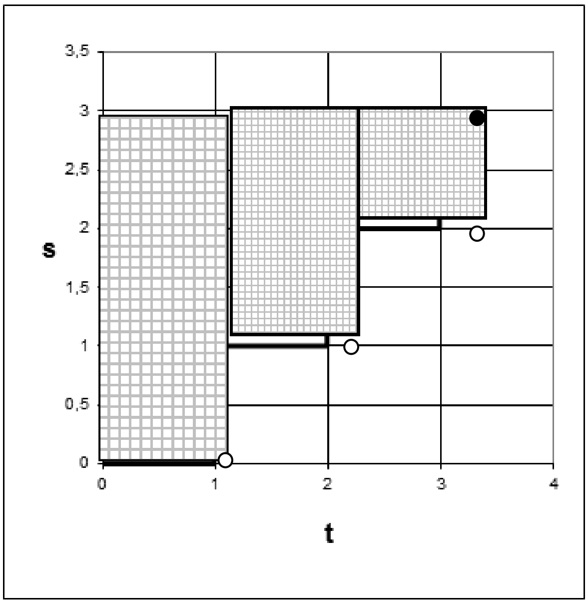


*Рис. 1. Вид функции* $\chi_1(t,s)$

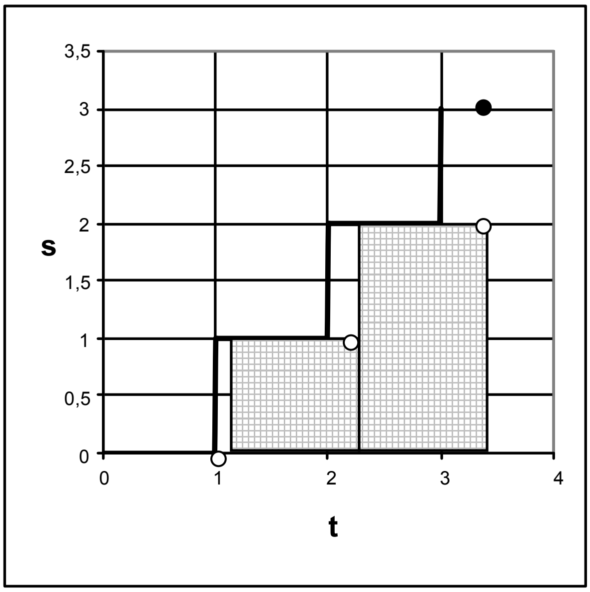


*Рис. 2. Вид функции* $\chi_2(t,s)$

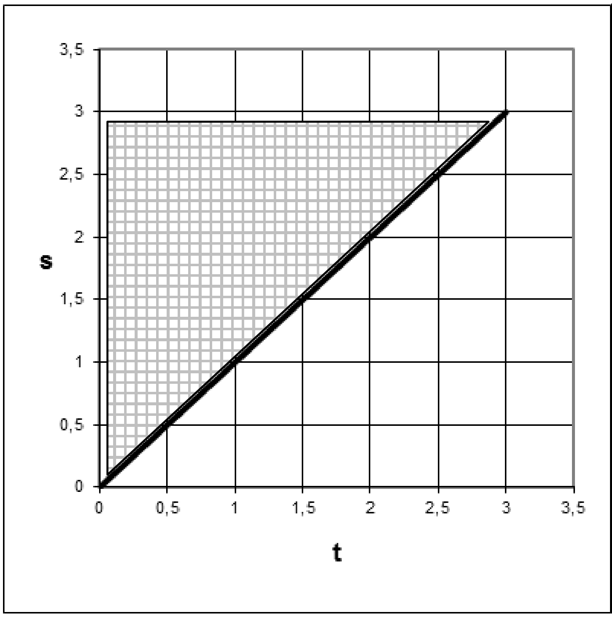


*Рис. 3. Вид функции* $\chi_3(t,s)$

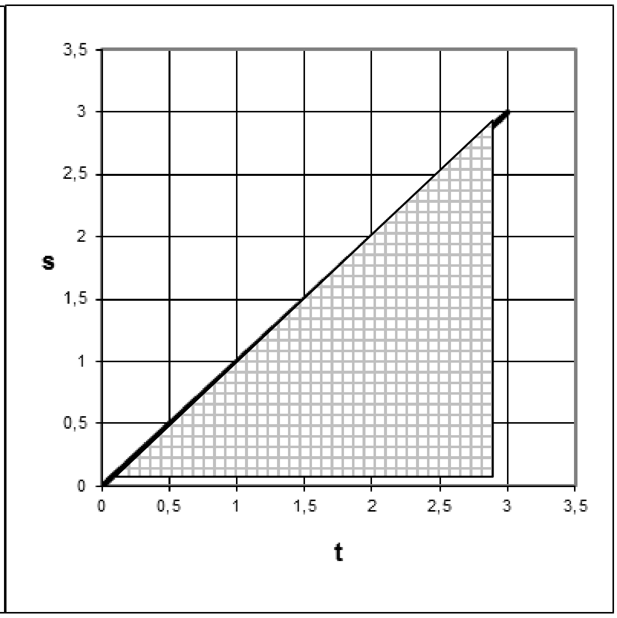


*Рис. 4. Вид функции* $\chi_4(t,s)$

Представим каждую из функций $\chi_i$, $i=\overline{1,4}$ в виде суммы произведений двух функций, одна из которых зависит только от $t$, а другая – только от $s$.

$$\chi_1(t,s)=\mu_0(t)\nu_0(s)+\mu_1(t)\nu_1(s)+\mu_2(t)\nu_2(s).$$

Т.к. на промежутке $t\in[0;1)$ - $[t]=0 \Rightarrow \mu_0(t)=0$.

$$\mu_1(t)=\begin{cases}1, t\in[1;2)\\ 0, t\notin[1;2)\end{cases} \qquad \nu_1(s)=\begin{cases}1, s\in[0;1]\\ 0, s\notin[0;1]\end{cases}$$

$$\mu_1(t)=\eta(t-1)-\eta(t-2) \qquad \nu_1(s)=\eta(s)-\eta(s-1)$$

$$\mu_2(t)=\begin{cases}1, t\in[2;3)\\ 0, t\notin[2;3)\end{cases} \qquad \nu_2(s)=\begin{cases}1, s\in[0;2]\\ 0, s\notin[0;2]\end{cases}$$

$$\mu_2(t)=\eta(t-2)-\eta(t-3) \qquad \nu_2(s)=\eta(s)-\eta(s-2)$$

$$\chi_2(t,s)=\mu_3(t)\nu_3(s)+\mu_4(t)\nu_4(s)+\mu_5(t)\nu_5(s).$$

$$\mu_3(t)=\begin{cases}1, t\in[0;1)\\0, t\notin[0;1)\end{cases}\qquad \nu_3(s)=\begin{cases}1, s\in[0;3]\\0, s\notin[0;3]\end{cases}$$

$$\mu_3(t)=\eta(t)-\eta(t-1)\qquad \nu_3(s)=\eta(s)-\eta(s-3)$$

$$\mu_4(t)=\begin{cases}1, t\in[1;2)\\0, t\notin[1;2)\end{cases}\qquad \nu_4(s)=\begin{cases}1, s\in[1;3]\\0, s\notin[1;3]\end{cases}$$

$$\mu_4(t)=\eta(t-1)-\eta(t-2)=\mu_1(t)\qquad \nu_4(s)=\eta(s-1)-\eta(s-3)$$

$$\mu_5(t)=\begin{cases}1, t\in[2;3)\\0, t\notin[2;3)\end{cases}\qquad \nu_5(s)=\begin{cases}1, s\in[2;3]\\0, s\notin[2;3]\end{cases}$$

$$\mu_5(t)=\eta(t-2)-\eta(t-3)=\mu_2(t)\qquad \nu_5(s)=\eta(s-2)-\eta(s-3)$$

Функции $\chi_3, \chi_4$ будем делить на прямоугольники со стороной 0,015. В связи с этим, полученное решение будет приближенным.

$$\tilde{\chi}_3(t,s)=\sum_{m=0}^{199}\mu_{m+6}(t)\nu_{m+6}(s),\ t\in[0{,}015m;0{,}015(m+1)),\ s\in[0;0{,}015m],\ m=0;1;2;\ldots$$

$$\mu_{m+6}(t)=\begin{cases}1, t\in[0{,}015m;0{,}015(m+1))\\0, t\notin[0{,}015m;0{,}015(m+1))\end{cases}\qquad \nu_{m+6}(s)=\begin{cases}1, s\in[0;0{,}015m]\\0, s\notin[0;0{,}015m]\end{cases}$$

$$\tilde{\chi}_4(t,s)=\sum_{m=0}^{199}\mu_{m+206}(t)\nu_{m+206}(s),\ t\in[0{,}015m;0{,}015(m+1)),\ s\in[0{,}015m;3],\ m=0;1;2;\ldots$$

$$\mu_{m+206}(t)=\begin{cases}1, t\in[0{,}015m;0{,}015(m+1))\\0, t\notin[0{,}015m;0{,}015(m+1))\end{cases}\qquad \nu_{m+206}(s)=\begin{cases}1, s\in[0{,}015m;3]\\0, s\notin[0{,}015m;3]\end{cases}$$

Запишем ядро уравнения (7). Оно будет состоять из двух частей – точной и приближенной.

$$K(t,s)=K_1(t,s)+\tilde{K}_2(t,s).$$

$$K_1(t,s)=B(t)W(0,s)-pW([t],s).$$

$$K_1(t,s)=\underbrace{\frac{\omega}{3}}_{=a_o(t)}\cdot\underbrace{1}_{=b_0(s)}+\underbrace{p\frac{\omega}{3}\mu_1(t)}_{=a_1(t)}\cdot\underbrace{\nu_1(s)}_{=b_1(s)}+\underbrace{p\frac{2\omega}{3}\mu_2(t)}_{=a_2(t)}\cdot\underbrace{\nu_2(s)}_{=b_2(s)}+\underbrace{p\mu_3(t)}_{=a_3(t)}\cdot\underbrace{\nu_3(s)}_{=b_3(s)}+$$

$$+\underbrace{p\left(\frac{\omega}{3}+1\right)\mu_4(t)}_{=a_4(t)}\cdot\underbrace{\nu_4(s)}_{=b_4(s)}+\underbrace{p\left(\frac{2\omega}{3}+1\right)\mu_5(t)}_{=a_5(t)}\cdot\underbrace{\nu_5(s)}_{=b_5(s)}=\sum_{j=0}^{5}a_j(t)b_j(s).$$

$$K_2(t,s)=-qW(t,s).$$

$$K_2(t,s)=\sum_{j=0}^{199}\left(\underbrace{q\frac{t\omega}{3}\mu_{j+6}(t)}_{=a_{j+6}(t)}\cdot\underbrace{\nu_{j+6}(s)}_{=b_{j+6}(s)}+\underbrace{q\left(\frac{t\omega}{3}+1\right)\mu_{j+206}(t)}_{=a_{j+206}(t)}\cdot\underbrace{\nu_{j+206}(s)}_{=b_{j+206}(s)}\right)=$$

$$=\sum_{j=0}^{199}\left(a_{j+6}(t)b_{j+6}(s)+a_{j+206}(t)b_{j+206}(s)\right).$$

Уравнение (7) примет вид:

$$z(t)=\int_0^3\left(K_1(t,s)+\widetilde{K}_2(t,s)\right)z(s)ds+f(t).$$

$$z(t)=\int_0^3\left(\sum_{j=0}^{5}a_j(t)b_j(s)+\sum_{j=0}^{199}\left(a_{j+6}(t)b_{j+6}(s)+a_{j+206}(t)b_{j+206}(s)\right)\right)z(s)ds+f(t).$$

Умножим обе части последнего равенства на $b_i(t),\ i=\overline{0,405}$ и проинтегрируем почленно от 0 до 3 [4]:

$$\int_0^3 z(t)b_i(t)dt=\sum_{j=0}^{5}\int_0^3 b_i(t)a_j(t)dt\cdot\int_0^3 b_j(s)z(s)ds+$$

$$+\sum_{j=0}^{199}\left(\int_0^3 b_{i+6}(t)a_{j+6}(t)dt\cdot\int_0^3 b_{j+6}(s)z(s)ds+\int_0^3 b_{i+206}(t)a_{j+206}(t)dt\cdot\int_0^3 b_{j+206}(s)z(s)ds\right)+\int_0^3 b_i(t)f(t)dt.$$

Введем следующие обозначения:

$$\int_0^3 z(t)b_i(t)dt=Y_i,\qquad \int_0^3 b_i(t)a_j(t)dt=\alpha_{ij},\qquad \int_0^3 b_i(t)f(t)dt=c_i.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$Y_i=\sum_{j=0}^{405}\alpha_{ij}Y_j+c_i,\ \ i=\overline{0,405}. \qquad (8)$$

Уравнение (8) имеет единственное решение, если матрица $A$, обратима и выполнено неравенство $\varepsilon<\dfrac{1}{r}$.

Общий вид этого решения:

$$z(t)=\sum_{j=0}^{405}a_j(t)Y_j+f(t)=\sum_{j=0}^{405}a_j(t)\left(\sum_{i=0}^{405}\theta_{ij}c_i\right)+f(t).$$

Таким образом, краевая задача (3.1.4) – (3.1.5) однозначно разрешима.

$$Y'(t)+B(t)Y(0)=z(t).$$

$$Y'(t)-\frac{\omega}{3}Y(0)=z(t).$$

$$\widetilde{Y}(t)=\int_0^t\widetilde{z}(s)ds+\int_0^t\frac{\omega}{3}Y(0)ds=\int_0^t\widetilde{z}(s)ds+\frac{\omega}{3}tY(0).$$

Причем из равенства (6) получим:

$$Y(0)=\int_0^3 W(0,s)z(s)ds=-\int_0^3 z(s)ds.$$

Таким образом, доказана теорема:

Теорема 1. Пусть матрица $A$ – обратима и выполнено неравенство $\varepsilon<\dfrac{1}{r}$. Тогда краевая задача (4) – (5) однозначно разрешима, причем ее решение имеет представление

$$\widetilde{Y}(t)=\int_0^t\widetilde{z}(s)ds-\int_0^t B(s)Y(0)ds,$$

с точностью

$$\int_0^{nT}\left[z(t)-\widetilde{z}(t)\right]^2dt\le\frac{\varepsilon^2r^4}{(1-\varepsilon\cdot r)^2}\cdot\int_0^{nT}\left[f(t)\right]^2dt,$$

и, кроме того,

$$Y(0)=\int_0^{nT}W(0,s)z(s)ds.$$

<u>Рассмотрим пример</u>. Пусть в краевой задаче $n=3$, $T=1$, $B=0.05$, $c=0.04$, $A(t)=2$, $\eta(t)=0$, $\omega=1.1$. Тогда краевая задача примет вид:

$$Y'(t)+\frac{20}{19}Y([t])-\frac{4}{95}Y(t)=\frac{40}{19},\ t\in[0,3],$$
$$Y(3)=1{,}1\cdot Y(0).$$

В качестве вырожденного ядра выберем кусочно-постоянную аппроксимацию ядра $K(t,s)$ с шагом разбиения 0,015 квадрата $[0,3]\times[0,3]$. Найдем оценку $\varepsilon$:

$$\varepsilon=\sqrt{\int_0^3\int_0^3 q^2\left(\frac{S}{2}+\frac{St\omega}{3}\right)^2 dtds}=0{,}006253,$$

где $S=0{,}015^2\cdot 200=0{,}045$ - площадь фигуры, которой пренебрегли при построении вырожденного ядра. Согласно условиям теоремы 1, проверим выполнение неравенства $\varepsilon<\frac{1}{r}$. Получим $r=74{,}5636\Rightarrow\frac{1}{r}=0{,}0134$, а, значит, неравенство $\varepsilon<1/r$ выполнено.

Матрица $A$ обратима, а, значит, условия теоремы 1 выполнены и краевая задача (4) – (5) однозначно разрешима. При этом

$$Y(0)=\int_0^3 W(0,s)z(s)ds=-\int_0^3 z(s)ds=1{,}894.$$

Тогда общий вид решения:

$$\tilde{Y}(t)=\int_0^t\tilde{z}(s)ds-\int_0^t B(s)Y(0)ds=\int_0^t\tilde{z}(s)ds+0{,}6945t.$$

## ***Литература***


1. *Аллен Р.* Математическая экономия. М.:ИЛ, 1963. 196 с.
2. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
3. *Бергстром А. Р.* Построение и применение математических моделей. М.: Прогресс, 1970. 176 с.
4. *Колемаев В. А.* Математическая экономика: Учебник для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. 399 с.