Многоскоростная коэффициентно-обратная задача переноса с малым параметром при интеграле столкновений

Омуров Т. Д.[1], Саркелова Ж. Ж.[2]

[1]*Омуров Таалайбек Дардайылович / Omurov Taalaibek Dardailovich - доктор физико-математических наук, профессор,*
кафедра математического анализа;
[2]*Саркелова Жылдыз Жанышевна / Sarkelova Jyldyz Zhanyshevna – старший преподаватель,*
кафедра кибернетики и информационных технологий,
факультет математики, информатики и кибернетики,
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, г. Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация*: заметим, что не только уравнения переноса без параметра имеют физические приложения, но и задачи с малым параметром имеют конкретные физические приложения. Так, например, в работе [10] изучается поведение решения задачи для телеграфного уравнения при большой абсорбции, где* $\varepsilon=\mu^{-1}$, $\mu>1$ *– коэффициент абсорбции,* $f=f\left(x,\ t\right)$ *– заданная функция источников. В связи с этим в данной работе рассматривается многоскоростная обратная задача переноса с малым параметром типа Каца-Больцмана, то есть обратная задача требует нахождения неизвестной функции распределения и восстановления неизвестного коэффициента в правой части.*

Ключевые слова: *задача переноса, функция распределения, многоскоростная обратная задача, малый параметр, гладкие функции, весовое пространство.*

Введение

Кинетическая теория или теории переноса [1, 2, 4, 5, 7] восходит к работе Больцмана по кинетической теории газов, которая не потеряла своей актуальности и в настоящее время. Именно предположение о линейности так сильно упрощает уравнение для потока нейтронов по сравнению с кинетическими уравнениями теории газов. Нелинейные уравнения должны, в частности, рассматриваться при расчетах устойчивости реакторов [3] и других областях, где нелинейная теория переноса является вполне справедливой.

В связи с этим в работе исследуется нелинейно-нагруженная многоскоростная обратная задача переноса с малым параметром. Поэтому, естественно, возникает проблема: построить решение возмущенной задачи с учетом тех условий, которые накладываются на известные функции и [11]: $h_0>0$. Причем на основе этих условий и вытекает близость решений возмущенного и вырожденного уравнений в пространстве гладких функций.

Результаты работы могут быть использованы при дальнейших исследованиях по дифференциальным и интегро–дифференциальным уравнениям в частных производных более высокого порядка для уравнений переноса более сложной структуры.

Пусть требуется найти пару неизвестных функций $\left(f_\varepsilon\left(x_1,...,x_n,t\right),V_\varepsilon\left(t\right)\right)$ для уравнения с малым параметром при интегральном члене в многоскоростном случае, если

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f_\varepsilon}{\partial t}+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\dfrac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i}+h_0f_\varepsilon=V_\varepsilon(t)F(x_1,x_2,...,x_n,t)+\varepsilon[\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,t)}{\partial x_i}]Kf_\varepsilon,\\ \forall(x_1,x_2,...,x_n,t)\in\Omega_1=R^n\times[0,T_0],\\ Kf_\varepsilon\equiv\int\limits_{\Omega=R^n}K\left(x_1,...,x_n;x_1',...,x_n'\right)h_0\left(x_1',...,x_n'\right)f_\varepsilon\left(x_1',...,x_n',t\right)d\Omega;\ \ h_0\equiv\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i),\end{cases}\tag{1}$$

$$f_\varepsilon\big|_{t=0}=f_0(x_1,x_2,...,x_n),\forall(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n,\tag{2}$$

$$f_\varepsilon(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,t)=\varphi(t),\forall t\in[0,T_0],\tag{3}$$

1) $0<a_i=\text{const},\ 0<\lambda_i(x_i),\varphi\left(t\right),0\le K(.),F(x_1,x_2,...,x_n,t),\ f_0-$заданные функции, $R^n\ni(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0),(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$,

2) $0\ne F(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,t),\forall(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,t)\in\Omega_1$, причем: $\int\limits_{\Omega}K\left(x_1,...,x_n;x_1',...,x_n'\right)d\Omega=1.$

Здесь функции $\left(f_\varepsilon(x_1,...,x_n,t),V_\varepsilon(t)\right)\in W_C=\{f,V: f\in C^{1,...,1}(\Omega_1),V\in C[0,T_0]\}$ с нормой: $\|f\|_{W_C}=\|f\|_C+\sum_{i=1}^{n}\left\|f_{x_i}\right\|_C+\|f_t\|_C+\|V\|_C$.

1. Проводя интегральное преобразование [6, 8]:

$$\begin{cases} f=Q(x_1,x_2,...,x_n,t)\exp\left(-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\int\limits_{-\infty}^{x_i}\lambda_i(x_i^{/})dx_i^{/}\right),\forall(x_1,x_2,...,x_n,t)\in\Omega_1, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t}+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\dfrac{\partial Q}{\partial x_i}=\exp\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\int\limits_{-\infty}^{x_i}\lambda_i(x_i^{/})dx_i^{/}\right)[V(t)F(x_1,x_2,...,x_n,t)+ \\ +\varepsilon[\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,t)}{\partial x_i}]Kf_\varepsilon], \\ Q|_{t=0}=Q_0(x_1,x_2,...,x_n)\equiv f_0(x_1,x_2,...,x_n)\exp\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\int\limits_{-\infty}^{x_i}\lambda_i(x_i^{/})dx_i^{/}\right),\ \ \forall(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n, \end{cases} \tag{4}$$

из (1) получим

$$\begin{aligned} f_\varepsilon= {} & f_0(x_1-a_1t,...,x_n-a_nt)\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\int\limits_{x_i-a_it}^{x_i}\lambda_i(x_i^{/})dx_i^{/}\right)+\int\limits_0^t\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\int\limits_{x_i-a_i(t-s)}^{x_i}\lambda_i(x_i^{/})dx_i^{/}\right)\times \\ & \times\{V_\varepsilon(s)F(x_1-a_1(t-s),...,x_n-a_n(t-s);s)+ \\ & +\varepsilon[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,s)}{\partial x_i}]\int\limits_\Omega K(x_1-a_1(t-s),...,x_n- \\ & -a_n(t-s);x_1',...,x')h_0\left(x_1',...,x_n'\right)f_\varepsilon\left(x_1',...,x_n',s\right)d\Omega\}ds\equiv H_0[V_\varepsilon,f_\varepsilon,f_{\varepsilon x_1},f_{\varepsilon x_2},...,f_{\varepsilon x_n}], \end{aligned} \tag{5}$$

так как

$$\begin{aligned} Q= {} & Q_0(x_1-a_1t,x_2-a_2t,...,x_n-a_n,t)+\int\limits_0^t\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\int\limits_{-\infty}^{x_i-a_i(t-s)}\lambda_i(x_i^{/})dx_i^{/}\right)[V\left(s\right)F(x_1-a_1(t-s),x_2- \\ & -a_2(t-s),...,x_n-a_n(t-s);s)+\varepsilon[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,s)}{\partial x_i}]\int\limits_\Omega K(x_1-a_1(t-s),...,x_n- \\ & -a_n(t-s);x_1',...,x')h_0\left(x_1',...,x_n'\right)f_\varepsilon\left(x_1',...,x_n',s\right)d\Omega]ds. \end{aligned}$$

Лемма 1. Уравнение (5) является эквивалентным интегральным представлением задачи (1)–(3).

Доказательство. Действительно, дифференцируя (5) последовательно по t и x_i :

$$f_{\varepsilon t}=-\sum_{i=1}^{n}a_i f_{0l_i}(x_1-a_1t,...,x_n-a_nt)\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\int_{x_i-a_it}^{x_i}\lambda_i(x_i^/)dx_i^/\right)+f_0(x_1-a_1t,...,x_n-a_nt)\times$$

$$\times\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\int_{x_i-a_it}^{x_i}\lambda_i(x_i^/)dx_i^/\right)[-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i-a_it)]+V_\varepsilon(t)F(x_1,x_2,...,x_n,t)+$$

$$+\varepsilon[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,t)}{\partial x_i}]Kf_\varepsilon+\int_0^t\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\int_{x_i-a_i(t-s)}^{x_i}\lambda_i(x_i^/)dx_i^/\right)\{[-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i-a_i(t-s))]\times$$

$$\times V_\varepsilon(s)F(x_1-a_1(t-s),...,x_n-a_n(t-s);s)-\sum_{i=1}^{n}V_\varepsilon(s)a_iF_{h_i}(x_1-a_1(t-s),...,x_n-$$

$$-a_n(t-s);s)+\varepsilon[-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i-a_i(t-s))][\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,s)}{\partial x_i}]\int_\Omega K(x_1-a_1(t-s),...,x_n-$$

$$-a_n(t-s);x_1',...,x')h_0\left(x_1',...,x_n'\right)f_\varepsilon\left(x_1',...,x_n',s\right)d\Omega-$$

$$-\varepsilon[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,s)}{\partial x_i}]\int_\Omega(\sum_{i=1}^{n}a_iK_{h_i}(x_1-a_1(t-s),...,x_n-$$

$$-a_n(t-s);x_1',...,x')h_0\left(x_1',...,x_n'\right)f_\varepsilon(x_1',...,x_n',s))d\Omega\}ds,$$

$$l_i=x_i-a_it,\quad h_i=x_i-a_i(t-s),(i=\overline{1,n}),$$

$$f_{\varepsilon x_i}=\sum_{i=1}^{n}f_{0l_i}(x_1-a_1t,...,x_n-a_nt)\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\int_{x_i-a_it}^{x_i}\lambda_i(x_i^/)dx_i^/\right)+f_0(x_1-a_1t,...,x_n-a_nt)\times$$

$$\times\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\int_{x_i-a_it}^{x_i}\lambda_i(x_i^/)dx_i^/\right)[-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}(\lambda_i(x_i)-\lambda_i(x_i-a_it))]+$$

$$+\int_0^t\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\int_{x_i-a_i(t-s)}^{x_i}\lambda_i(x_i^/)dx_i^/\right)\times\{[-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}(\lambda_i(x_i)-\lambda_i(x_i-a_i(t-s))]V_\varepsilon(s)F(x_1-$$

$$-a_1(t-s),...,x_n-a_n(t-s);s)+\sum_{i=1}^{n}V_\varepsilon(s)F_{h_i}(x_1-a_1(t-s),...,x_n-a_n(t-s);s)+$$

$$+\varepsilon[-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}(\lambda_i(x_i)-\lambda_i(x_i-a_i(t-s))]\times[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,s)}{\partial x_i}]\int_\Omega K(x_1-a_1(t-s),...,x_n-$$

$$-a_n(t-s);x_1',...,x')h_0\left(x_1',...,x_n'\right)\times f_\varepsilon\left(x_1',...,x_n',s\right)d\Omega+$$

$$+\varepsilon[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,s)}{\partial x_i}]\int_\Omega(\sum_{i=1}^{n}K_{h_i}(x_1-a_1(t-s),...,x_n-a_n(t-s);x_1',...,x')\times$$

$$\times h_0\left(x_1',...,x_n'\right)f_\varepsilon(x_1',...,x_n',s))d\Omega\}ds\equiv(H_i[V_\varepsilon,f_\varepsilon,f_{\varepsilon x_1},f_{\varepsilon x_2},...,f_{\varepsilon x_n}])(x_1,x_2,...,x_n,t),(i=\overline{1,n}).$$

(6)

Подставляя найденные производные и функцию в (1), получим тождество. Лемма доказана.

Далее, подставляя $x_i=x_i^0$, $i=\overline{i,n}$ в (5) и дифференцируя по t, выразим неизвестный коэффициент $V_\varepsilon(t)$, причем, учитывая (4), (5), получим систему в виде

$$\begin{cases} f_\varepsilon = (H_0[V_\varepsilon, f_\varepsilon, f_{\varepsilon x_1}, f_{\varepsilon x_2},..., f_{\varepsilon x_n}])(x_1,...,x_n,t), \\ f_{\varepsilon x_i} = (H_i[V_\varepsilon, f_\varepsilon, f_{\varepsilon x_1}, f_{\varepsilon x_2},..., f_{\varepsilon x_n}])(x_1,...,x_n,t), (i=\overline{1,n}), \\ V_\varepsilon(t) = (H[V_\varepsilon, f_\varepsilon, f_{\varepsilon x_1}, f_{\varepsilon x_2},..., f_{\varepsilon x_n}])(t), \end{cases} \qquad (6`)$$

где

$$\begin{cases} (H[V_\varepsilon, f_\varepsilon, f_{\varepsilon x_1}, f_{\varepsilon x_2},..., f_{\varepsilon x_n}])(t) \equiv (F(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,t))^{-1}\{ f_1(t) - [\varepsilon[\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,t)}{\partial x_i}]\times \\ \times K f_\varepsilon(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,t) + \int_0^t \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\int_{x_i^0-a_i(t-s)}^{x_i^0} \lambda_i(x_i^/)dx_i^/\right)\{[-\sum_{i=1}^n \lambda_i(x_i^0 - a_i(t-s))]V_\varepsilon(s)F(x_1^0 - \\ -a_1(t-s),...,x_n^0 - a_n(t-s);s) - \sum_{i=1}^n V_\varepsilon(s)a_i F_{h_i}(x_1^0 - a_1(t-s),...,x_n^0 - a_n(t-s);s) + \\ +\varepsilon[-\sum_{i=1}^n \lambda_i(x_i^0 - a_i(t-s))][\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,s)}{\partial x_i}]\int_\Omega K(x_1^0 - a_1(t-s),...,x_n^0 - a_n(t-s);x_1',...,x')\times \\ \times h_0(x_1',...,x_n')\, f_\varepsilon(x_1',...,x_n',s)\,d\Omega - \varepsilon[\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,s)}{\partial x_i}]\int_\Omega (\sum_{i=1}^n a_i K_{h_i}(x_1^0 - a_1(t-s),...,x_n^0 - \\ -a_n(t-s);x_1',...,x')h_0(x_1',...,x_n')\, f_\varepsilon(x_1',...,x_n',s))d\Omega\}ds]\}, \\ f_1(t) \equiv \varphi_t(t) - \{-\sum_{i=1}^n a_i f_{0l_i}(x_1^0 - a_1 t,...,x_n^0 - a_n t)\exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\int_{x_i^0-a_i t}^{x_i^0} \lambda_i(x_i^/)dx_i^/\right) + f_0(x_1^0 - a_1 t,...,x_n^0 - \\ -a_n t)\exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\int_{x_i^0-a_i t}^{x_i^0} \lambda_i(x_i^/)dx_i^/\right)[-\sum_{i=1}^n \lambda_i(x_i^0 - a_i t)]\}. \end{cases}$$

Таким образом, для решения обратной задачи (1)–(3) получается замкнутая система (*n+2*) интегральных уравнений Вольтерра второго рода (6) по переменной $t \in [0,T_0]$, решение которой может быть найдено методом Пикара:

$$\begin{cases} f_{\varepsilon,m+1} = (H_0[V_{\varepsilon,m}, f_{\varepsilon,m}, f_{\varepsilon x_1,m}, f_{\varepsilon x_2,m},..., f_{\varepsilon x_n,m}])(x_1,...,x_n,t), (m=1,2,...), \\ f_{\varepsilon x_i,m+1} = (H_i[V_{\varepsilon,m}, f_{\varepsilon,m}, f_{\varepsilon x_1,m}, f_{\varepsilon x_2,m},..., f_{\varepsilon x_n,m}])(x_1,...,x_n,t), (i=\overline{1,n}), \\ V_{\varepsilon,m+1}(t) = (H[V_{\varepsilon,m}, f_{\varepsilon,m}, f_{\varepsilon x_1,m}, f_{\varepsilon x_2,m},..., f_{\varepsilon x_n,m}])(t), \end{cases} \qquad (7)$$

при этом

$$[V_{\varepsilon,m}, f_{\varepsilon,m}, f_{\varepsilon x_1,m}, f_{\varepsilon x_2,m},..., f_{\varepsilon x_n,m}] \xrightarrow[m\to\infty]{} [V_\varepsilon, f_\varepsilon, f_{\varepsilon x_1}, f_{\varepsilon x_2},..., f_{\varepsilon x_n}], \forall(x_1,...,x_n,t)\in\Omega_1. \qquad (8)$$

Теорема 1. Пусть имеют место условия (2)-(4) и (8). Тогда задача (1)-(3) имеет единственное ограниченное вместе со своими частными производными решение в W_C.

2. Доказать, чтобы

$$(f_\varepsilon, V_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} (f,V) \quad (9)$$

в W_C, поступим следующим образом, т. е., предполагая $\varepsilon = 0$, получим вырожденную задачу:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + h_0 f = V(t)F(x_1,x_2,...,x_n,t), \forall(x_1,x_2,...,x_n,t)\in\Omega_1 = R^n\times[0,T_0], \qquad (10)$$

$$f|_{t=0} = f_0(x_1,x_2,...,x_n), \forall(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n, \qquad (11)$$

$$f(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,t) = \varphi(t), \forall t\in[0,T_0]. \qquad (12)$$

Следовательно, учитывая (4), имеем

$$f = f_0(x_1 - a_1 t,..., x_n - a_n t)\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\int_{x_i - a_i t}^{x_i}\lambda_i(x_i^/)dx_i^/\right) + \int_0^t \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\int_{x_i - a_i(t-s)}^{x_i}\lambda_i(x_i^/)dx_i^/\right)\times$$
$$\times V(s)F(x_1 - a_1(t-s),..., x_n - a_n(t-s); s)ds \equiv (G_0 V)\left(x_1,..., x_n, t\right)$$

(13)

или

$$\begin{cases} f = (G_0 V)\left(x_1,..., x_n, t\right), \\ f_{x_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(G_0 V) \equiv (G_i V)(x_1,..., x_n, t), (i = \overline{1,n}), \\ V(t) = (GV)(t), \\ (GV)(t) \equiv (F(x_1^0, x_2^0,..., x_n^0, t))^{-1}\{ f_1(t) - [\int_0^t \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\int_{x_i^0 - a_i(t-s)}^{x_i^0}\lambda_i(x_i^/)dx_i^/\right)\times \\ \times\{[-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i^0 - a_i(t-s))]V(s)F(x_1^0 - a_1(t-s),..., x_n^0 - a_n(t-s); s) - \sum_{i=1}^{n}V(s)a_i F_{h_i}(x_1^0 - \\ - a_1(t-s),..., x_n^0 - a_n(t-s); s)\}ds]\}, \\ f_1(t) \equiv \varphi_t(t) - \{-\sum_{i=1}^{n}a_i f_{0l_i}(x_1^0 - a_1 t,..., x_n^0 - a_n t)\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\int_{x_i^0 - a_i t}^{x_i^0}\lambda_i(x_i^/)dx_i^/\right) + \\ + f_0(x_1^0 - a_1 t,..., x_n^0 - a_n t)\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\int_{x_i^0 - a_i t}^{x_i^0}\lambda_i(x_i^/)dx_i^/\right)[-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i^0 - a_i t)]\}. \end{cases} \quad (14)$$

Так как уравнение относительно функции $V(t)$ является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, то разрешимо в $C[0,T_0]$. Поэтому функция f и все частные производные первого порядка $f_{x_i}, (i = \overline{1,n})$ определяются с точностью на основе функции $V(t)$. Следовательно, вырожденная задача (10)-(12) разрешима в W_C.

Далее, полагая

$$\begin{cases} f_\varepsilon(x_1,..., x_n, t) = f(x_1,..., x_n, t) + \xi_\varepsilon(x_1,..., x_n, t), \\ V_\varepsilon(t) = V(t) + \eta_\varepsilon(t), \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \eta_\varepsilon(0) = 0, \\ \xi_\varepsilon(x_1, x_2,..., x_n, 0) = 0, \\ \xi_\varepsilon(x_1^0, x_2^0,..., x_n^0, t) = 0, \end{cases} \quad (16)$$

из задачи (1)–(3) следует

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi_\varepsilon}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}a_i\dfrac{\partial \xi_\varepsilon}{\partial x_i} + h_0\xi_\varepsilon = \eta_\varepsilon(t)F(x_1, x_2,..., x_n, t) + \\ +\varepsilon[\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial(\xi_\varepsilon(x_1^*, x_2^*,..., x_n^*, t) + f(x_1^*, x_2^*,..., x_n^*, t))}{\partial x_i}](K(\xi_\varepsilon + f))(x_1, x_2,..., x_n, t), \\ \forall (x_1, x_2,..., x_n, t) \in \Omega_1, \\ K(\xi_\varepsilon + f) \equiv \int_{\Omega = R^n} K\left(x_1,..., x_n; x_1',..., x_n'\right)h_0\left(x_1',..., x_n'\right)[\xi_\varepsilon\left(x_1',..., x_n', t\right) + f_\varepsilon\left(x_1',..., x_n', t\right)]d\Omega. \end{cases} \quad (17)$$

Тогда, воспользовавшись системой (5) для задачи (16), (17), имеем:

$$\begin{cases}\xi_\varepsilon=(\bar H_0[\eta_\varepsilon,\xi_\varepsilon,\xi_{\varepsilon x_1},\xi_{\varepsilon x_2},...,\xi_{\varepsilon x_n}])(x_1,...,x_n,t),\\ \xi_{\varepsilon x_i}=(\bar H_i[\eta_\varepsilon,\xi_\varepsilon,\xi_{\varepsilon x_1},\xi_{\varepsilon x_2},...,\xi_{\varepsilon x_n}])(x_1,...,x_n,t),(i=\overline{1,n}),\\ \eta_\varepsilon(t)=(\bar H[\eta_\varepsilon,\xi_\varepsilon,\xi_{\varepsilon x_1},\xi_{\varepsilon x_2},...,\xi_{\varepsilon x_n}])(t),\end{cases}\qquad(18)$$

причем

$$\begin{cases}(\bar H_0[\eta_\varepsilon,\xi_\varepsilon,\xi_{\varepsilon x_1},\xi_{\varepsilon x_2},...,\xi_{\varepsilon x_n}])(x_1,...,x_n,t)\equiv\int\limits_0^t\exp\left(-\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\int\limits_{x_i-a_i(t-s)}^{x_i}\lambda_i(x_i')dx_i'\right)\{\eta_\varepsilon(s)F(x_1-\\ -a_1(t-s),...,x_n-a_n(t-s);s)+\varepsilon[\sum\limits_{i=1}^n\frac{\partial(\xi_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,s)+f(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,s))}{\partial x_i}]\int\limits_\Omega K(x_1-\\ -a_1(t-s),...,x_n-a_n(t-s);x_1',...,x')h_0(x_1',...,x_n')[\xi_\varepsilon(x_1',...,x_n',s)+f(x_1',...,x_n',s)]d\Omega\}ds,\\ (\bar H_i[\eta_\varepsilon,\xi_\varepsilon,\xi_{\varepsilon x_1},\xi_{\varepsilon x_2},...,\xi_{\varepsilon x_n}])(x_1,x_2,...,x_n,t)\equiv\int\limits_0^t\exp\left(-\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\int\limits_{x_i-a_i(t-s)}^{x_i}\lambda_i(x_i')dx_i'\right)\times\\ \times\{[-\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{a_i}(\lambda_i(x_i)-\lambda_i(x_i-a_i(t-s))]\eta_\varepsilon(s)F(x_1-a_1(t-s),...,x_n-a_n(t-s);s)+\sum\limits_{i=1}^n\eta_\varepsilon(s)F_{h_i}(x_1-\end{cases}$$

$$\begin{cases}-a_1(t-s),...,x_n-a_n(t-s);s)+\varepsilon[-\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{a_i}(\lambda_i(x_i)-\lambda_i(x_i-a_i(t-s))]\times\\ \times[\sum\limits_{i=1}^n\frac{\partial(\xi_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,s)+f(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,s))}{\partial x_i}]\int\limits_\Omega K(x_1-a_1(t-s),...,x_n-a_n(t-s);x_1',...,x')\times\\ \times h_0(x_1',...,x_n')[\xi_\varepsilon(x_1',...,x_n',s)+f(x_1',...,x_n',s)]d\Omega+\varepsilon[\sum\limits_{i=1}^n\frac{\partial(\xi_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,s)+f(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,s))}{\partial x_i}]\times\\ \times\int\limits_\Omega(\sum\limits_{i=1}^n K_{h_i}(x_1-a_1(t-s),...,x_n-a_n(t-s);x_1',...,x')h_0(x_1',...,x_n')[\xi_\varepsilon(x_1',...,x_n',s)+\\ +f(x_1',...,x_n',s)])d\Omega\}ds,(i=\overline{1,n}),\\ (\bar H[\eta_\varepsilon,\xi_\varepsilon,\xi_{\varepsilon x_1},\xi_{\varepsilon x_2},...,\xi_{\varepsilon x_n}])(t)\equiv(F(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,t))^{-1}\times\\ \times\{-[\varepsilon[\sum\limits_{i=1}^n\frac{\partial(\xi_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,s)+f(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,s))}{\partial x_i}](K(\xi_\varepsilon+f_\varepsilon))(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,t)+\\ +\int\limits_0^t\exp\left(-\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\int\limits_{x_i^0-a_i(t-s)}^{x_i^0}\lambda_i(x_i')dx_i'\right)\{[-\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i(x_i^0-a_i(t-s))]\eta_\varepsilon(s)F(x_1^0-a_1(t-s),...,x_n^0-\\ -a_n(t-s);s)-\sum\limits_{i=1}^n\eta_\varepsilon(s)a_iF_{h_i}(x_1^0-a_1(t-s),...,x_n^0-a_n(t-s);s)+\varepsilon[-\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i(x_i^0-a_i(t-s))]\times\\ \times[\sum\limits_{i=1}^n\frac{\partial(\xi_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,s)+f(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,s))}{\partial x_i}]\int\limits_\Omega K(x_1^0-a_1(t-s),...,x_n^0-a_n(t-s);x_1',...,x')\times\\ \times h_0(x_1',...,x_n')[\xi_\varepsilon(x_1',...,x_n',s)+f(x_1',...,x_n',s)]d\Omega-\\ -\varepsilon[\sum\limits_{i=1}^n\frac{\partial(\xi_\varepsilon(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,s)+f(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,s))}{\partial x_i}]\int\limits_\Omega(\sum\limits_{i=1}^n a_iK_{h_i}(x_1^0-a_1(t-s),...,x_n^0-\\ -a_n(t-s);x_1',...,x')h_0(x_1',...,x_n')[\xi_\varepsilon(x_1',...,x_n',s)+f(x_1',...,x_n',s)])d\Omega\}ds]\}.\end{cases}$$

Поэтому, учитывая результаты теоремы 1 и

$$\begin{cases} \xi_{\varepsilon,m+1} = (\bar{H}_0[\eta_{\varepsilon,m}, \xi_{\varepsilon,m}, \xi_{\varepsilon x_1,m}, \xi_{\varepsilon x_2,m}, ..., \xi_{\varepsilon x_n,m}])\left(x_1,...,x_n,t\right), (m=1,2,...), \\ \xi_{\varepsilon x_i,m+1} = (\bar{H}_i[\eta_{\varepsilon,m}, \xi_{\varepsilon,m}, \xi_{\varepsilon x_1,m}, \xi_{\varepsilon x_2,m}, ..., \xi_{\varepsilon x_n,m}])(x_1,...,x_n,t), (i=\overline{1,n}), \\ \eta_{\varepsilon,m+1}(t) = (\bar{H}[\eta_{\varepsilon,m}, \xi_{\varepsilon,m}, \xi_{\varepsilon x_1,m}, \xi_{\varepsilon x_2,m}, ..., \xi_{\varepsilon x_n,m}])(t), \end{cases} \tag{19}$$

получим

$$[\eta_\varepsilon, \xi_\varepsilon, \xi_{\varepsilon x_1}, \xi_{\varepsilon x_2}, ..., \xi_{\varepsilon x_n}] \xrightarrow[m\to\infty]{} 0, \forall\left(x_1,...,x_n,t\right) \in \Omega_1. \tag{20}$$

Теорема 2. В условиях теоремы 1 и (20) решение $\left(f_\varepsilon; V_\varepsilon\right)$ исходной задачи (1)–(3) равномерно сходится к решению $\left(f; V\right)$ вырожденной задачи (10) –(12)в W_C, когда $\varepsilon \to 0$.

Замечание. Известно, что при выполнении условий теоремы 1 задача (1)–(3) разрешима в W_C. Следовательно, альтернативно можем считать, что на основе теоремы вложения К. Фридрихса [9] обратная задача (1)–(3) и разрешима в $W^2_{h_*}$, и при этом имеет место $(f_\varepsilon, V_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} (f, V)$ в смысле нормы $W^2_{h_*}$, где

$$W^2_{h_*} = \left\{ f_\varepsilon \in C\left(\Omega_1\right);\ f_{\varepsilon x_i u}, f_{\varepsilon t} \in L^2_{h_*}\left(\Omega\right); V_\varepsilon \in L^2\left(0, T_0\right), i=\overline{1,n}\right\},\ \ h_* \equiv \lambda_1(x_1)\times\lambda_2(x_2)\times...\times\lambda_n(x_n),$$

$$\|\cdot\|_{W^2_{h_*}} = \| f_\varepsilon \|_C + \sum_{i=1}^{n} \left\| f_{\varepsilon x_i} \right\|_{2,h_*} + \| f_{\varepsilon t} \|_{2,h_*} + \|V\|_2 .$$

Литература

1. *Агашков В. И.* Некоторые вопросы теории приближенного решения задач о переносе частиц. М: ОВМ АН СССР, 1984. 206 с.
2. *Владимиров В. С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц [Текст] // Труды МИАН СССР. / В. С. Владимиров. М.: 1961, № 61. С. 3–158.
3. *Винг Дж. М.* Кинетическая теория и спектральные проблемы [Текст] // Теория ядерных реакторов: Сб. / Дж. М. Винг. М.: Госатомиздат, 1963. С. 160–171.
4. *Марчук Г. Н.* Численные методы в теории переноса нейтронов [Текст] /Г. Н. Марчук, В. И. Лебедев. – М.: Атомиздат, 1981. 454 с.
5. *Максвелл Дж.* Основатели кинетической теории материи. М.: Л., ОНТИ, 1937. – С. 201.
6. *Омуров Т. Д.* Прямые и обратные задачи односкоростной теории переноса [Текст] / Т. Д. Омуров, М. М. Туганбаев. Бишкек: Илим, 2010. 116 с.
7. *Смелов В. Б.* Лекции по теории переноса нейтронов [Текст] / В. Б. Смелов. М.: Атомиздат, 1978. 216 с.
8. *Туганбаев М. М.* Прямые и обратные задачи для многоскоростных уравнений типа Каца – Больцмана [Текст] / М. М. Туганбаев. Бишкек, 2011. 122 с.
9. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 196 с.
10. *Smith D. R.* On the Behavior of the Solution of the Telegraphist's Equation for Large Absorption [Text] / D. R. Smith, J. T. Palmer. // Arch. Ration Mech. and Anal, 1970, 39, № 2, pp. 146–157.
11. *Kac M.* Foundations of kinetic theory, in the Proceeding of the third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, edited Neyman J. (University jf California Press, Berkeley, 1956), [Text] / M. Kac. Vol. III. pp. 171–197.
12. *Омуров Т. Д.* Трехскоростная коэффициентно-обратная задача переноса типа Каца [Текст] / Омуров Т. Д., Туганбаев М. М., Саркелова Ж. Ж. // Наука, техника и образование № 5 (23), 2016. С. 8-18.