СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Аширов А.

Аширов Аллаберды - кандидат физико-математических наук, научный сотрудник,
Институт инженерно-технических и транспортных коммуникаций Туркменистана,
г. Ашхабад, Туркменистан

Аннотация: *исследование малых колебаний жидкости в сосуде относится к числу классических задач гидромеханики. Задачи о колебаниях стратифицированной жидкости, заполняющей ограниченную область пространства, находят приложения в теории колебаний нефти в танкерах, при изучении колебаний криогенных жидкостей в закрытых резервуарах в теории сейш и т.д. В настоящей работе рассмотрены некоторые вопросы, связанные с задачей о колебаниях стратифицированной жидкости в упругом сосуде.*
С помощью вспомогательных задач показывается сведение соответствующей спектральной задачи к операторному пучку в некотором Гильбертовом пространстве.
Ключевые слова: *стратифицированная жидкость, колебания, операторы, пространства, собственные значения.*

FREE VIBRATIONS OF AN IDEAL STRATIFIED FLUID AND RELATED OPERATOR EQUATIONS

Ashirov A.

Ashirov Allaberdy - Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher,
INSTITUTE OF ENGINEERING-TECHNICAL AND TRANSPORT COMMUNICATIONS OF TURKMENISTAN,
ASHGABAT, TURKMENISTAN

Abstract: *the study of small fluctuations of a liquid in a vessel is one of the classical problems of hydromechanics. The problems of oscillations of a stratified fluid filling a limited area of space find applications in the theory of oil oscillations in tankers, in the study of oscillations of cryogenic liquids in closed reservoirs in the theory of seiches, etc. In this paper, we consider some issues related to the problem of oscillations of a stratified fluid in an elastic vessel.*
Using auxiliary problems, we show the reduction of the corresponding spectral problem to an operator pencil in some Hilbert space.
Keywords: *stratified fluid, oscillations, operators, spaces, eigenvalues.*

УДК 517.958:532.2

В настоящей работе рассмотрены некоторые вопросы, связанных с задачей о колебаниях стратифицированной жидкости в упругом сосуде.

Список работ, относящихся к изучению задач о колебаниях жидкости в ограниченном объеме, весьма широк. Отметим здесь лишь работы [1] – [3], которые наиболее близки к изучаемым в данной работе вопросам.

1. Постановка задачи. В пространстве $\boldsymbol{R^3} = \{(x_1, x_2, x_3)\}$ рассмотрим ограниченные области Ω_1 и Ω_0 таки, что $\overline{\Omega_0} \subset \Omega_1$. Обозначим $\Omega = \Omega_1 \backslash \overline{\Omega}_0$.

Пусть в упругом теле, занимающем область Ω , находится идеальная, несжимаемая стратифицированная жидкость, полностью заполняющая область Ω_0. Пусть $\sum = \partial\Omega_0$ - граница области Ω_0 а $\sum_1 = \partial\Omega \backslash \sum$ внешняя часть границы области Ω. Предположим, что $\sum,\ \sum_1 \in \boldsymbol{C^2}$.

Напомним, что основным частотным параметром, характеризующий распространение и типы волн в стратифицированной жидкости, является так называемая частота Вяйсяля – Брента $N(x_3)$, которая определяется соотношением

$$N^2(x_3) = -g\rho_0'(x_3)/\rho_0(x_3), \rho_0(0) > 0, \qquad (1.1)$$

где: $\rho_0(x_3)$ и $\rho_0'(x_3)$ соответственно стационарное распределение плотности и его производная а, g – ускорение свободного падения. Будем считать, что на стратифицированную жидкость действует гравитационное поле с ускорением $-g\boldsymbol{k}$, где $\boldsymbol{k}$ - орт оси ox_3 декартовой системы координат $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Рассматривается случай устойчивой стратификации жидкости

$$0 < N_{min}^2 \leq N^2(x_3) \leq N_0^2 < \infty\,, \qquad (1.2)$$

где: $N^2(x_3)$ считается непрерывной функцией x_3.

Обозначим через $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ отклонение точки $\boldsymbol{x} \in \Omega$ в момент времени t, а через $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)$ – поле скорости в жидкости. Пусть $\rho(\boldsymbol{x})$ - плотность упругого тела, $P(\boldsymbol{x}, t)$ - отклонение от равновесного давления в жидкости. Мы предполагаем, что упругое тело – изотропно в этом случае тензор напряжения этого тела имеет вид

$$\sigma_{jk}(\boldsymbol{u}) = \Lambda\delta_{jk} di\vartheta \boldsymbol{u} + M\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)$$

$(j, k = 1,2,3)$, где δ_{jk} –символ Кронекера а, Λ и M константы Ляме. Пусть

$$(L\boldsymbol{u})_j = -\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{jk}(\boldsymbol{u})}{\partial x_k}$$

тогда уравнения малых движений этой механической системы имеют вид [4, 5].

$$\begin{cases} -\sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{\partial \sigma_{jk}(\boldsymbol{u})}{\partial x_k} + \rho \dfrac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = 0, \quad (\Omega), \quad j = 1,2,3; \quad \sigma(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}|_{\Sigma_1} = 0 & (1.3) \\ \rho_0(x_3)\dfrac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \nabla P + g\rho_1 \boldsymbol{k} = 0, \quad (\Omega_0) & (1.4) \\ \dfrac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla\rho_0 \cdot \boldsymbol{V} = 0 \quad (\Omega_0), \quad di\vartheta \boldsymbol{V} = 0 \quad (\Omega_0) & (1.5) \\ \sigma(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}|_{\Sigma} = P\boldsymbol{n}|_{\Sigma}, \quad \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}, \boldsymbol{n}\right)\Big|_{\Sigma} = \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}, \boldsymbol{n}\right)\Big|_{\Sigma} & (1.6) \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{u}_t(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega & (1.7) \\ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{x}), \quad \rho_1(\boldsymbol{x}, 0) = \rho_1^0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_0 & (1.8) \end{cases}$$

где: $\rho_1(\boldsymbol{x}, t)$- отклонение поля плотности от исходного поля $\rho_0(x_3)$, $\boldsymbol{n}$ - единичная нормаль к $\partial\Omega$ внешняя относительно области Ω. Краевое условие

$$\sigma(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}|_{\Sigma_1} = 0$$

означает отсутствие напряжений на $\sum_1$, первое из краевых условий (1.6) означает равенство напряжений на $\sum$, а второе показывает, что объем, освобождаемый в результате перемещения в окрестности $\sum$ одной из контактирующих сред, полностью заполняется частицами другой среды. (1.7) – (1.8) начальные условия.

Чтобы получить задачу на собственные значения будем искать решения, зависящие от времени как $exp(i\lambda t)$. Подставляя решения такого вида в (1.3) – (1.6) получим следующую задачу на собственные значения относительно спектрального параметра λ:

$$L\boldsymbol{u} - \rho\lambda^2\boldsymbol{u} = 0(\Omega), \quad \sigma(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n} = 0 \quad (\textstyle\sum_1) \qquad (1.9)$$
$$\lambda^2\boldsymbol{V} - i\lambda\rho_0^{-1}(x_3)\nabla P - N^2(x_3)\, \boldsymbol{k}\,(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V}) = 0 \quad (\Omega_0) \qquad (1.10)$$
$$di\vartheta \boldsymbol{V} = 0 \quad (\Omega_0) \qquad (1.11)$$
$$\sigma(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n} = P\boldsymbol{n}(\textstyle\sum), \quad \boldsymbol{V}_n = \boldsymbol{u}_n \quad (\textstyle\sum) \qquad (1.12)$$

Именно эта система является объектом исследования. Цель, которую мы ставим, состоит в том, чтобы изучить структуру спектра и свойства собственных функций указанной задачи.

2. Функциональные пространства. Вспомогательные задачи. Обозначим через $\boldsymbol{L}_2(\Omega_0, \rho_0)$ гильбертово пространство вещественных вектор – функций со скалярным произведением

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{V}) = \int\limits_{\Omega_0} \rho_0(x_3)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})d\Omega_0 \qquad (2.1)$$

Как следует из (1.1) и (1.2) для функций $\rho_0 = \rho_0(x_3)$ справедливы неравенства

$0 \le \overline{m} \le \rho_0(x_3) \le \overline{M} < \infty$ (2.2)

а эти неравенства обеспечивают эквивалентность норм, определяемых (2.1) и обычным скалярным произведением в $\boldsymbol{L}_2(\Omega_0)$.

Введем гильбертово пространства $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega_0, \rho_0^{-1})$ с нормой

$$\|\Phi\|_{1,\Omega_0} = \left(\int\limits_{\Omega_0} \rho_0^{-1}(x_3)|\nabla\Phi|^2 d\Omega_0\right)^{1/2} \qquad (2.3)$$

Очевидно что, это норма эквивалентна обычной норме пространства $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega_0)$

В дальнейшем ограничимся такими функциями из $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega_0, \rho_0^{-1})$, для которых выполнено условие

$$\int\limits_{\Sigma} \Phi\, ds = 0$$

и обозначим это множество функций снова через $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega_0, \rho_0^{-1})$. Тогда вместо (2.3) будет иметь

$$(\Phi, \psi)_{1,\Omega_0} = \int\limits_{\Omega_0} \rho_0^{-1}(x_3)\nabla\Phi\cdot\nabla\psi d\Omega_0, \qquad \forall\Phi\ ,\psi \in \boldsymbol{W}_2^1(\Omega_0, \rho_0^{-1})$$

Введем обозначения

$$\mathfrak{I}_0(\Omega_0, \rho_0) = \left\{\boldsymbol{u} = \rho_0^{-1}(x_3)\nabla\varphi, \varphi \in \boldsymbol{W}_2^1(\Omega_0, \rho_0^{-1}), \varphi|_{\Sigma} = 0\right\}$$

$$\Im_{\Sigma}(\Omega_0,\rho_0)=\left\{\boldsymbol{\vartheta}=\rho_0^{-1}\nabla\varphi, \varphi\in \boldsymbol{W}_2^1(\Omega_0,\rho_0^{-1}),\ \nabla(\rho_0^{-1}(x_3)\nabla\varphi)=0, \int\limits_{\Sigma}\varphi ds=0\right\}$$
$$\boldsymbol{G}(\Omega_0,\rho_0)=\{\boldsymbol{w}\in \boldsymbol{L}_2(\Omega_0,\rho_0^{-1}): (\boldsymbol{w},\rho_0^{-1}(x_3)\nabla\varphi)=0,\ \ \forall\varphi\in \boldsymbol{W}_2(\Omega_0,\rho_0^{-1})\}$$

Лемма 1. Множества $\Im_0(\Omega_0,\rho_0), \Im_{\Sigma}(\Omega_0,\rho_0)$ и $\boldsymbol{G}(\Omega_0,\rho_0)$ - являются взаимно-ортогональными подпространствами пространства $\boldsymbol{L}_2(\Omega_0,\rho_0)$ и имеет место разложение

$$\boldsymbol{L_2}(\Omega_0,\rho_0)=\Im_0(\Omega_0,\rho_0)\oplus\Im_{\Sigma}(\Omega_0,\rho_0)\oplus\boldsymbol{G}(\Omega_0,\rho_0)$$

Доказательство леммы проводится по той же схеме, что и для случая $\rho_0(x_3)=1$ (см., напр., [6]). Обозначим

$$\boldsymbol{H}_0=\left\{\boldsymbol{u}\in \boldsymbol{L}_2(\Sigma): \int\limits_{\Sigma}\boldsymbol{u}ds=0\right\}$$

Задача 1. Найти решение задачи

$$\nabla(\rho_0^{-1}(x_3)\nabla\Phi)=0, \qquad \boldsymbol{x}\in\Omega_0 \tag{2.4}$$

$$\rho_0^{-1}(x_3)\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{n}}=\eta, \quad \boldsymbol{x}\in\Sigma, \quad \int\limits_{\Sigma}\eta ds=0 \tag{2.5}$$

Определение. Функция $\Phi\in \boldsymbol{W}_2^1(\Omega_0,\rho_0^{-1})$ для которой тождество

$$(\Phi,\psi)_{1,\Omega_0}=(\eta,\psi)_{H_0} \tag{2.6}$$

имеет место при $\forall\psi\in \boldsymbol{W}_2^1(\Omega_0,\rho_0^{-1})$ называется обобщенным решением задачи (2.4) – (2.5).

Лемма 2. Задача (2.4) – (2.5) имеет единственное обобщенное решение принадлежащее пространству $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega_0,\rho_0^{-1})$. В этой задаче возникает положительный, самосопряженный, вполне непрерывный оператор

$$A: \boldsymbol{H}_0\to\boldsymbol{H}_0, D(A)=\boldsymbol{H}_0$$

Доказательство. Сначала покажем, что $\forall\eta\in\boldsymbol{H}_0$ задача (2.4) – (2.5) имеет, единственное решение $\Phi\in \boldsymbol{W}_2^1(\Omega_0,\rho_0^{-1})$. В силу неравенства (2.2) и теоремы вложения ([7]) из (2.6) получим

$$\left|(\eta,\psi)_{\boldsymbol{H}_0}\right|\le\|\eta\|_{\boldsymbol{H}_0}\|\psi\|_{\boldsymbol{H}_0}\le M\|\eta\|\|\psi\|_{1,\Omega_0}$$

Согласно теореме Рисса об общем виде линейного функционала, найдется единственный элемент $\Phi\in \boldsymbol{W}_2^1(\Omega_0,\rho_0^{-1})$ такой что равенство (2.6) выполняется для любого $\psi\in \boldsymbol{W}_2^1(\Omega_0,\rho_0^{-1})$.

Введем в рассмотрение оператор A, который ставит в соответствие элементу $\eta\in\boldsymbol{H}_0$ посредством решения задачи (2.4) – (2.5) функцию

$$A\eta=\Phi|_{\Sigma}, \tag{2.7}$$

где: $\Phi|_{\Sigma}\in\Im_{\Sigma}(\Omega_0,\rho_0)\cap \boldsymbol{W}_2^1(\Omega_0,\rho_0^{-1})$, $\qquad \eta=\rho_0^{-1}(x_3)\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{n}}$

Используя (2.7) для любых элементов $\eta_1,\eta_2\in\boldsymbol{H}_0$, нетрудно показать равенства

$$(\eta_1,A\eta_2)_{\boldsymbol{H}_0}=(\Phi_1,\Phi_2)_{1,\Omega_0}$$
$$(A\eta_1,\eta_2)_{\boldsymbol{H}_0}=(\Phi_1,\Phi_2)_{1,\Omega_0}$$

Отсюда следует

$$(A\eta_1,\eta_2)_{\boldsymbol{H}_0}=(\eta_1,A\eta_2)_{\overline{H}_0}$$

т.е. A – самосопряженный оператор. Теперь покажем, что A>0. Для любого элемента $\eta\in\boldsymbol{H}_0$ из (2.7) получим

$$(A\eta,\eta)_{\boldsymbol{H}_0}=(\eta,A\eta)_{\boldsymbol{H}_0}=\int\limits_{\Sigma}\eta\cdot A\eta ds=\int\limits_{\Sigma}\eta\cdot\Phi ds=\int\limits_{\Sigma}\rho_0^{-1}(x_3)\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{n}}ds=$$
$$=\int\limits_{\Omega_0}\rho_0^{-1}(x_3)\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi ds=\|\Phi\|_{1,\Omega_0}^2\ge 0.$$

Так как при $A\eta=0$, отсюда следует что $\Phi|_{\Sigma}=0$, а поэтому $\eta=0$, то $A>0$.

Компактность оператора A легко следует из теоремы вложения (см. [7]).

Лемма 2 доказана.

Рассмотрим следующие вспомогательные задачи.

Задача II. По функции $f\in \boldsymbol{L}_2(\Omega)$ найти решение задачи

$$L\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_1=f \quad (\Omega), \qquad \sigma(\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega}=0 \tag{2.8}$$

Задача III. По функции $\psi\in L_2(\Sigma)$ найти решение задачи

$$L\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_2=0 \quad (\Omega), \qquad \sigma(\boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{n}|_{\Sigma_1}=0, \qquad \sigma(\boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{n}|_{\Sigma}=\psi \tag{2.9}$$

Как известно из [4] каждой из этих задач отвечает оператор, который однозначно задает обобщенное решение задачи. Выпишем последовательно обозначения для этих операторов и перечислим их свойства.

I. В **задаче II** возникает самосопряженный, положительный компактный оператор

$$C^{-1}: \boldsymbol{L}_2(\Omega,\rho_0)\to\boldsymbol{L}_2(\Omega)$$

причем

$\boldsymbol{u}_1 = C^{-1}f$ и $D\left(\boldsymbol{C}^{1/2}\right) = \boldsymbol{W}_2^1(\Omega, \rho_0^{-1})$

II. В **задаче III** возникает линейный непрерывный оператор

$$T\colon \boldsymbol{L}_2(\Sigma) \to \boldsymbol{W}_2^1(\Omega, \rho_0^{-1}),$$

действующий по правилу $\boldsymbol{u}_2 = T\psi$.

3. Переход к операторному уравнению. В пространстве $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{G}(\Omega, \rho_0) \oplus \boldsymbol{H}_0$ рассмотрим всюду плотное множество $\boldsymbol{H}_1$, состоящее из элементов $\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{w}, \xi)$ таких, что

$$\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{G}(\Omega_0, \rho_0), \qquad \xi \in D\left(A^{-1/2}\right)$$

Для произвольного $\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{H}_1$ построим функцию

$$\boldsymbol{V}(x) \in \Im_\Sigma(\Omega_0, \rho_0) \oplus \boldsymbol{G}(\Omega_0, \rho_0)$$

следующим образом

$\boldsymbol{V} = \rho_0^{-1}(x_3)\nabla\Phi + \boldsymbol{w}$, где $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{G}(\Omega_0, \rho_0)$, $\quad \rho_0^{-1}(x_3)\nabla\Phi \in \Im_\Sigma(\Omega_0, \rho_0)$

$$\rho_0^{-1}(x_3)\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{n}}\Big|_\Sigma = A^{-1/2}\xi \qquad (3.1)$$

Учитывая определение $\boldsymbol{G}(\Omega_0, \rho_0)$ и равенства $di\vartheta\boldsymbol{V} = 0$ функции $\boldsymbol{V}(\overline{\boldsymbol{x}})$ и $P(\boldsymbol{x})$ будем искать в виде

$$\boldsymbol{V} = \rho_0^{-1}(x_3)\nabla\Phi + \boldsymbol{w}, \qquad \left(\rho_0^{-1}(x_3)\nabla\Phi \in \Im_\Sigma(\Omega_0, \rho_0), \qquad \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{G}(\Omega_0, \rho_0)\right)$$

$$\rho_0^{-1}(x_3)\nabla P = \rho_0^{-1}(x_3)\nabla q + \rho_0^{-1}(x_3)\nabla\varphi \qquad (3.2)$$

$$\rho_0^{-1}(x_3)\nabla q \in \Im_0(\Omega_0, \rho_0), \qquad \rho_0^{-1}(x_3)\nabla\varphi \in \Im_\Sigma(\Omega_0, \rho_0)$$

Для любых элементов $\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}_1 \in \boldsymbol{H}_1$ введем оператор $B\colon \boldsymbol{H}_1 \to \boldsymbol{H}_1$, $D(B) = \boldsymbol{H}_1$ равенством

$$(B\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}_1) = (N^2(x_3)(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}, \boldsymbol{V}_1)$$

где: $\mathbf{V}_1 = \rho_0^{-1}(x_3)\nabla\Phi_1 + \mathbf{w}_1$, $\boldsymbol{w}_1 \in G(\Omega_0, \rho_0)$, $\quad \rho_0^{-1}\nabla\Phi_1 \in \Im_\Sigma(\Omega_0, \rho_0)$

$$\boldsymbol{Z}_1 = (\boldsymbol{w}_1, \xi_1).$$

нетрудно показать, что $B = B^*$ и

$$O \le B \le N_0^2 I$$

Здесь O и I нулевой и единичный операторы в $\boldsymbol{H}_1$.

Учитывая $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}_1)_{\boldsymbol{L}_2(\Omega_0,\rho_0)} = (\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}_1)_{H_1}$ из равенства (1.10) получим

$$\lambda^2(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}_1)_{\boldsymbol{H}_1} - i\lambda(\rho_0^{-1}(x_3)\nabla P, \boldsymbol{V}_1)_{\boldsymbol{L}_2(\Omega,\rho_0)} - (B\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}_1) = 0 \qquad (3.3)$$

Из ортогональности подпространств $\Im_0(\Omega_0, \rho_0), \Im_\Sigma(\Omega_0, \rho_0), \boldsymbol{G}(\Omega_0, \rho_0)$ и равенства (3.2) получим:

$$\left(\rho_0^{-1}(x_3)\nabla P, \mathbf{V}_1\right)_{\mathbf{L}_2(\Omega_0,\rho_0)} = \left(A^{-1/2}\varphi, \xi_1\right) = (\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_1).$$

где: $\boldsymbol{Z}_2 = \left(0, A^{-1/2}\varphi\right)$.

Тогда получим

$$\lambda^2(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}_1) - i\lambda(\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_1) + (\boldsymbol{B}\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}_1) = 0$$

В силу произвольности $\boldsymbol{Z}_1$ из (3.3) получим уравнение

$$\lambda^2\boldsymbol{Z} - i\lambda\boldsymbol{Z}_2 - B\boldsymbol{Z} = 0 \qquad (3.4)$$

Лемма 3. Краевые условия (1.6) можно записать в виде

$$\sigma(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}|_\Sigma = \varphi\boldsymbol{n}|_\Sigma \qquad (3.5)$$

$$\boldsymbol{\xi} = A^{1/2}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{n})|_\Sigma \qquad (3.6)$$

Доказательство. Учитывая $\rho_0^{-1}(x_3)\nabla\varphi \in \Im_\Sigma(\Omega_0, \rho_0)$ равенство (3.5) легко можно получить из (3.2)

Теперь покажем (3.6) нетрудно показать, что если

$\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}_2^1(\Omega_0, \rho_0^{-1}) \cap \boldsymbol{G}(\Omega, \rho_0)$, то

$$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{n})|_\Sigma = 0, \qquad di\vartheta\boldsymbol{w} = 0(\Omega_0)$$

Действительно, так как $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{G}(\Omega, \rho_0)$ тогда для $\forall\varphi \in \overset{0}{\boldsymbol{W}}{}_2^1(\Omega_0, \rho_0^{-1})$ будет

$$\int_{\Omega_0} di\vartheta\boldsymbol{w}\varphi dx = 0, \quad \forall\varphi \in \overset{0}{\boldsymbol{W}}{}_2^1(\Omega_0, \rho_0^{-1})$$

то есть $\qquad di\vartheta\boldsymbol{w} = 0 \qquad (\Omega_0) \qquad (3.7)$

$$(\boldsymbol{w}, \rho_0^{-1}\nabla\varphi)_{L_2(\Omega,\rho_0)} = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{w}\nabla\varphi dx = -\int_{\Omega_0} di\vartheta\boldsymbol{w}\varphi dx + \int_\Sigma (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{n})\phi ds.$$

Отсюда учитывая (3.7) получим, что $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{n})|_\Sigma = 0$. Из равенства

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{n})|_\Sigma = (\rho_0^{-1}(x_3)\nabla\Phi, \boldsymbol{n})|_\Sigma + (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{n})|_\Sigma = \rho_0^{-1}(x_3)\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{n}}\Big|_\Sigma$$

Следует что $\quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{n})|_\Sigma = \rho_0^{-1}(x_3)\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{n}} \qquad (3.8)$

т.к. $\rho_0^{-1}(x_3)\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_\Sigma \in \boldsymbol{H}_0$ т.е. $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{n})|_\Sigma \in \boldsymbol{H}_0$.

Тогда, учитывая (3.1), получим, что

$$\xi = A^{1/2}\big((\boldsymbol{u},\boldsymbol{n})|_\Sigma\big)$$

Используя операторы, полученные в задачах **II** и **III,** и условие (3.6), получим

$$\boldsymbol{\tau} - C^{-1}\boldsymbol{\tau} - \lambda^2 C^{-1/2}\big(\rho C^{-1/2}\boldsymbol{\tau}\big) = F\boldsymbol{\chi} \qquad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\xi} = F^*\boldsymbol{\tau} \qquad (3.10)$$

где: $\boldsymbol{u} = C^{1/2}\boldsymbol{\tau}$, $\varphi = A^{1/2}\chi$

$$F^*\boldsymbol{\tau} = A^{1/2}\left(\left(C^{-1/2}\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{n}\right)\Big|_\Sigma\right), \quad F^*: \boldsymbol{L}_2(\Omega) \to \boldsymbol{H}_0$$

$$F\chi = C^{1/2}T\big(A^{1/2}\chi\cdot\boldsymbol{n}\big), \quad F: \boldsymbol{H}_0 \to \boldsymbol{L}_2(\Omega)$$

F и F^* - взаимно сопряженные операторы.

Оператор B представим в виде

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

где

$B_{11}^* = B_{11}$, $B_{22}^* = B_{22}$ и $B_{12}^* = B_{21}$, $B_{21}^* = B_{12}$

Умножая уравнение (3.4) слева на оператор

$$\begin{pmatrix} I & O \\ O & F \end{pmatrix}$$

Учитывая (3.9) и (3.10) получим уравнение

$$L(\mu)\boldsymbol{\zeta} = 0 \qquad (3.11)$$

где:

$$L(\mu) = A_0 - \mu A_1 + \mu^2 A_2 + \frac{1}{\mu}A_3, \quad \boldsymbol{\zeta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{w} \end{pmatrix} \quad \mu = i\lambda \qquad (3.12)$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} C^{-1} - I & 0 \\ B_{12}F^* & B_{11} \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} FF^* & 0 \\ O & O \end{pmatrix} \qquad (3.13)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} C^{-1/2}\rho C^{-1/2} & 0 \\ O & I \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} -FB_{22}F^* & FB_{21} \\ O & O \end{pmatrix}$$

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема. Задача (1.9) – (1.12) сводится к операторному уравнению (3.11) где пучок $L(\mu)$, действующий в пространстве $\widetilde{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{L}_2(\Omega) \oplus \boldsymbol{G}(\Omega,\rho_0)$, определяется из (3.12) и (3.13).

Список литературы / References

1. *Аширов А., Оразов М.Б.* К задаче о колебаниях стратифицированной жидкости в упругой оболочке. Тез. Докл. XXI Всесоюзной школы по теории операторов в функциональных пространствах. Челябинск, 1986. Часть III.
2. *Аширов А.* О полноте корневых функций в задаче о колебаниях вязкой стратифицированной жидкости в упругой оболочке. Журнал Вычислительной математики и математической физики. Москва, 1987. № 7. С. 1105-1107.
3. *Аширов А.* Об одной задаче о нормальных колебаниях упругой оболочки, заполненной стратифицированной жидкостью. Наука и техника в Туркменистане, 2011. № 2. С. 3-10.
4. *Оразов М.Б.* Некоторые вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов и связанные с ними задачи механики. Докт. Дисс., Ашхабад, 1983.
5. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М., “Наука”, 1986.
6. *Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д.* Гидромеханика невесомости. М., “Наука”, 1976.
7. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л. “Издат. ЛГУ”, 1988.