

КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МГНОВЕННО-НАРАСТАЮЩЕЙ НАГРУЗКИ

Бабажанов Б.Б. Email: Babajanov688@scientifictext.ru

*Бабажанов Балтабай Бекчанович - кандидат физико-математических наук, доцент,
кафедра программного инжиниринга,
Самаркандский филиал
Ташкентский университет информационных технологий,
г. Самарканд, Республика Узбекистан*

Аннотация: рассмотрены проблемы расчета трехслойного стержня при действии мгновенно-нарастающих нагрузок, Решены дифференциальные уравнения колебания трехслойного стержня при действии динамических нагрузок. Определены максимальные коэффициенты динамичности прогиба при различных видах закрепления концов балки, а также при переходе в двуслойный и однородные стержни. Проведены также расчеты при различных значениях упругих характеристик несущих слоев стержня. Проанализирована зависимость безразмерного параметра, зависящего от времени действия нагрузки и приведенной частоты стержня с коэффициентом динамичности прогиба. Установлено, что изменения напряжений несущих слоев в зависимости от безразмерного параметра, зависящего от времени действия нагрузки и приведенной частоты стержня, подобны к закону изменения коэффициента динамичности.

Ключевые слова: импульсно-статические нагрузки, мгновенная нагрузка, упругая стадия работы, жесткость балки, коэффициент динамичности.

OSCILLATIONS OF A THREE-LAYER BAR UNDER THE ACTION OF INSTANT INSTALLING LOAD

Babajanov B.B.

*Babajanov Baltabay Bekchanovich - PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
DEPARTMENT OF SOFTWARE ENGINEERING,
SAMARKAND BRANCH
TASHKENT UNIVERSITY OF INFORMATION TECHNOLOGIES,
SAMARKAND, REPUBLIC OF UZBEKISTAN*

Abstract: the problems of calculating a three-layer rod under the action of instantly increasing loads are considered. The differential equations of oscillation of a three-layer rod under the action of dynamic loads are solved. The maximum coefficients of the deflection dynamics were determined for various types of fixing the ends of the beams, as well as during the transition to a two-layer and homogeneous rods.

Calculations were also performed for different values of elastic characteristics of the bearing layers of the rod. The dependence of a dimensionless parameter depending on the time of action of the load and the reduced frequency of the rod with the coefficient of dynamic deflection is analyzed. It is established that changes of voltages bearing layers depending on a dimensionless parameter depending on time of action of the load and the frequency of the rod, similar to the law of variation of the dynamic factor.

Keywords: pulse-static loads, instantaneous load, elastic stage of work, beam stiffness, dynamic coefficient.

УДК 539.371

В гражданском строительстве, кораблестроении и самолетостроении кратковременные динамические нагрузки возникают главным образом под влиянием взрывных и ударных воздействий, как взрывные волны, удары, вызванные падением тяжелых тел. Результат таких воздействий на конструкцию, зависит в общем случае от взаимодействия конструкции с взрывной волной, ударяющим телом и т.п.

В работе [3, 68] рассмотрена трехслойный стержень под действием локальной прямоугольной нагрузки [3,70] и при воздействии локальной поперечной синусоидальной нагрузки [3, 72].

В статье [4, 90] рассмотрены проблемы расчета балки подземного сооружения теплотрассы при совместном действии импульсных и статических нагрузок в упругой стадии работы. Изучены коэффициенты динамичности, при расчете конструкции балки подземных сооружений, в упругой стадии для динамической нагрузки мгновенно-импульсного типа с нарастанием во времени.

В настоящей статье рассматривается воздействие кратковременных динамических нагрузок на трехслойные стержни, с которыми все чаще приходится иметь дело проектировщикам.

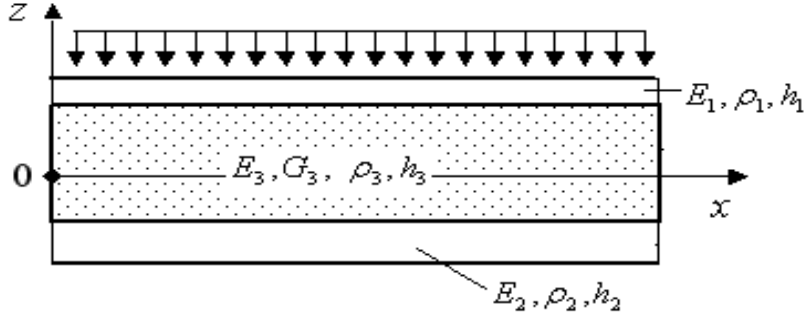


Рис. 1. Объект исследования и схема нагружения динамической нагрузкой

Рассмотрим дифференциальное уравнение колебания трехслойного стержня под действием динамических нагрузок [1,44]

$$D \left(1 - \frac{v h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^4 \chi(x, t)}{\partial x^4} + \rho h b \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \chi(x, t) = P(x, t) \quad (1)$$

где $\chi(x, t)$ - функция перемещений; $D = \frac{E h^3 b}{12} \theta$ - приведенная изгибная жесткость стержня;

$E = h^{-1} \sum_{i=1}^3 E_i h_i$ - осредненный по толщине модуль упругости и $\rho = h^{-1} \sum_{i=1}^3 \rho_i h_i$ - осредненный по

толщине плотность стержня; $Q(x, t)$ - внешняя динамическая нагрузка, h_1, h_2, h_3 - толщины слоев;

h, b - толщина и ширина стенки стержня; E_1, E_2, E_3 - модули упругости материала слоев; G_3 -

модуль поперечного сдвига заполнителя; ρ_1, ρ_2, ρ_3 - удельные плотности материалов слоев.

Вводя безразмерные параметры

$$\xi = \frac{x}{\ell}; \quad \chi = \frac{\chi}{\ell}; \quad a^2 = \frac{E}{\rho}; \quad \tau = \frac{at}{\ell}; \quad k = \frac{h^2}{\beta \ell^2}, \quad \theta_0 = \frac{a \theta_0}{\ell}, \quad P(\xi, \tau) = \frac{\ell P(x, t)}{E h b}$$

уравнение колебания (1) запишем в виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(1 - k \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \chi(\xi, \tau) + \frac{\theta h^2}{12 \ell^2} \left(1 - v k \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial^4 \chi(\xi, \tau)}{\partial \xi^4} = P(\xi, \tau) \quad (2)$$

Динамическую нагрузку представим в виде:

$$P(\xi, \tau) = P f_1(\xi) f(\tau) \quad (3)$$

где P - некоторое фиксированное значение динамической нагрузки, $f_1(\xi), f(\tau)$ - функции, характеризующие изменение нагрузки по пролету и во времени.

Для перемещения стержня примем выражение

$$\chi(\xi, \tau) = P X(\xi) T(\tau) \quad (4)$$

Здесь $X(\xi)$ - перемещение от действия статической нагрузки интенсивностью $f_1(\xi)$, $T(\tau)$ - функция динамичности перемещения.

Функция $X(\xi)$ определяется из следующего уравнения

$$\frac{\theta h^2}{12 \ell^2} \left(\frac{d^4 X}{d \xi^4} - k v \frac{d^6 X}{d \xi^6} \right) = f_1(\xi) \quad (5)$$

Подставляя формулы (3) и (4) в уравнение (2) и применяя метод Бубнова-Галеркина, воспользовавшись, условиями ортогональности имеем [2]:

$$\frac{d^2 T(\tau)}{d\tau^2} + \omega^2 T(\tau) = \omega^2 f(\tau) \quad (6)$$

где

$$\omega^2 = \frac{\theta h^2 \int_0^1 f_1(\xi) \left(X - k \frac{d^2 X}{d\xi^2} \right) d\xi}{12\ell^2 \int_0^1 \left(X - k \frac{d^2 X}{d\xi^2} \right)^2 d\xi},$$

Начальные значения $\frac{dT(\tau)}{d\tau}$ и $T(\tau)$ определяются из условия, что в начальный момент прогиб стержня и скорость его перемещения равны нулю:

$$\left[\frac{dT(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=0} = 0 \text{ и } [T(\tau)]_{\tau=0} = 0 \quad (7)$$

При равномерно распределенной нагрузке функцию $X(\xi)$ находим из (5) при $f_1(\xi) = 1$.

$$\frac{\theta h^2}{12\ell^2} \left(\frac{d^4 X}{d\xi^4} - kv \frac{d^6 X}{d\xi^6} \right) = 1$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$X(\xi) = \frac{12\ell^2}{\theta h^2} \left(C_1 k^2 v^2 e^{\frac{\sqrt{kv}\xi}{kv}} + C_2 k^2 v^2 e^{-\frac{\sqrt{kv}\xi}{kv}} + \frac{\xi^4}{24} + C_3 \frac{\xi^3}{6} + C_4 \frac{\xi^2}{2} + C_5 \xi + C_6 \right) \quad (8)$$

Здесь $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ неизвестные коэффициенты подлежащие определению из граничных условий при решении конкретных прикладных задач.

При воздействии мгновенно нарастающей нагрузки $f(\tau)$ имеет вид [2,97]

$$f(\tau) = \begin{cases} 1 - \tau/\theta_0 & \text{при } 0 \leq \tau \leq \theta_0, \\ 0 & \text{при } \tau > \theta_0. \end{cases}$$

Уравнение (6) при $0 \leq \tau \leq \theta_0$ примет вид:

$$\frac{d^2 T_1(\tau)}{d\tau^2} + \omega^2 T_1(\tau) = \frac{\omega^2}{\theta_0} (\theta_0 - \tau)$$

Общее решение последнего уравнения при нулевых начальных условиях имеет вид:

$$T_1(\tau) = \frac{\theta_0 - \tau}{\theta_0} + \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\theta_0} - \cos(\omega\tau) \quad (9)$$

При $\tau > \theta_0$

$$\frac{d^2 T_2(\tau)}{d\tau^2} + \omega^2 T_2(\tau) = 0 \quad (10)$$

Начальные значения получим из условий непрерывности перемещений, при прекращении нагрузки, т.е.:

$$\left[\frac{dT_2(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=\theta_0} = \left[\frac{dT_1(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=\theta_0} \text{ и } [T_2(\tau)]_{\tau=\theta_0} = [T_1(\tau)]_{\tau=\theta_0}$$

При $\tau = \theta_0$ из (8) имеем:

$$\left\{ \begin{aligned} T_2(\theta_0) = T_1(\theta_0) &= \frac{1}{\omega\theta_0} \sin(\omega\theta_0) - \cos(\omega\theta_0) \\ \left[\frac{dT_2(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=\theta_0} &= \left[\frac{dT_1(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=\theta_0} = -\frac{1}{\theta_0} + \frac{1}{\theta_0} \cos(\omega\theta_0) + \omega \sin(\omega\theta_0) \end{aligned} \right.$$

Решение уравнения (9) с учетом последних соотношений имеет вид:

$$T_2(\tau) = A \sin[\omega(\tau - \theta_0)] + B \cos[\omega(\tau - \theta_0)] \quad (11)$$

Здесь

$$A = \frac{1}{\omega^2 \theta_0} \sin(\omega\theta_0) - \frac{1}{\omega} \cos(\omega\theta_0), \quad B = -\frac{1}{\theta_0} + \frac{1}{\theta_0} \cos(\omega\theta_0) + \omega \sin(\omega\theta_0).$$

Результаты расчетов приведены в рис. 2-7, где сплошными линиями обозначены характеристики свободно-опертого стержня, штриховыми заземленного стержня и точечными характеристики трехслойного стержня, левый конец которого заземлен и правый торец свободно оперт с диафрагмой.

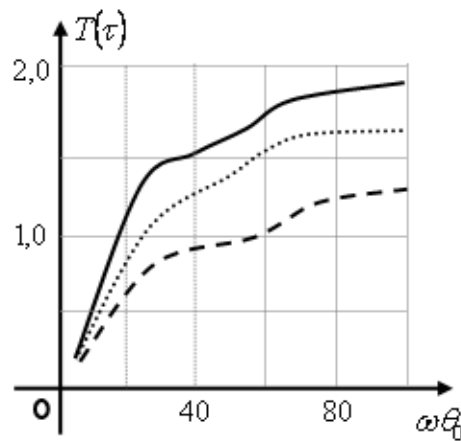


Рис. 2. Зависимость максимальных значений коэффициента динамичности от параметра $\omega\theta_0$

Из рис. 2 видно, что при $0 < \omega\theta_0 < 10$ коэффициент динамичности возрастает, а при $\omega\theta_0 > 10$, изменения коэффициента динамичности незначительно и при стремлении $\omega\theta_0 \rightarrow 100$ коэффициент динамичности стремится к 2.

Из рис. 3 видно, что значения прогиба стержня при свободном опирании значительно больше, чем при заземленном стержне и на 1,5 раза больше чем у стержня с заземленным и свободно-опертым с диафрагмой торцов.

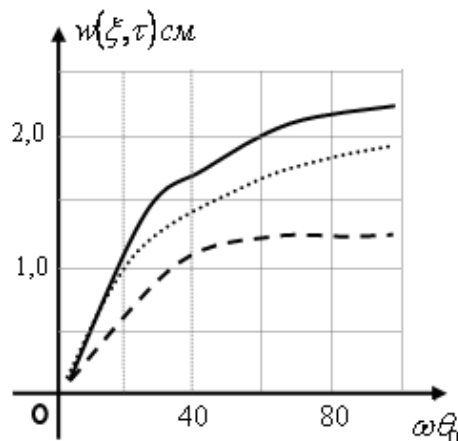


Рис. 3. Зависимость максимальных значений прогиба стержня от параметра $\omega\theta_0$

В рис 4. приведены значения максимальных значений прогиба стержня от внешней нагрузки P . Из графиков видно, что при возрастании интенсивности внешней нагрузки прогибы стержня возрастает пропорционально.

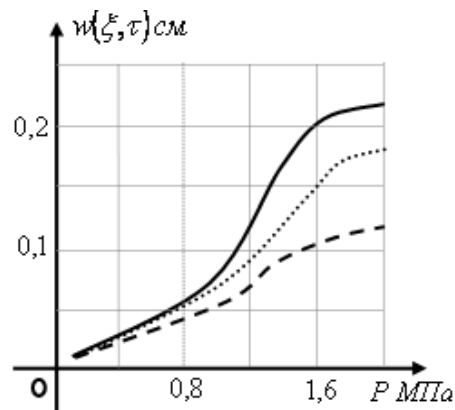


Рис. 4. Зависимость максимальных значений прогиба стержня от внешней нагрузки

На рис. 5. приведены максимальные значения прогиба трехслойного стержня в зависимости от параметра θ_0 . При $1 < \theta_0 < 10$ значения прогиба стержня почти одинаково, а при $\theta_0 > 10$ прогибы стержня возрастает в два раза.

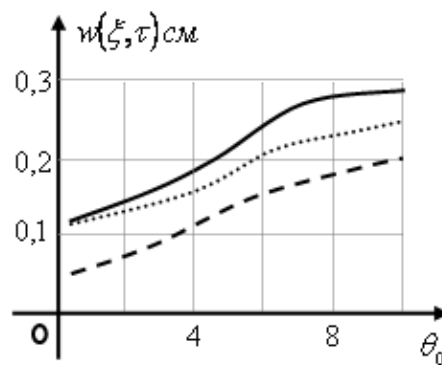


Рис. 5. Зависимость максимальных значений прогиба стержня от параметра θ_0

На рис. 6 приведен максимальные значения напряжений в слоях стержня. Значения напряжений верхнего несущего слоя вычислены при $z = \frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{2}$, при $z = \frac{h_3}{2}$ для заполнителя и при $z = -\frac{h_2}{2} - \frac{h_3}{2}$ для нижнего несущего слоя в сечении $\xi = 0.5$.

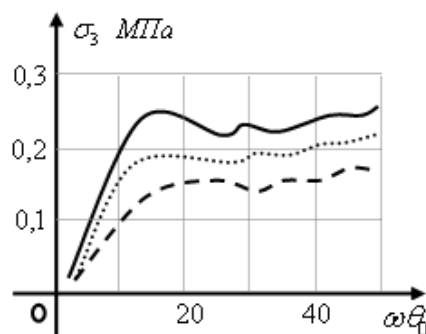


Рис. 6. Зависимость максимальных значений напряжения заполнителя от параметра $\omega\theta_0$

Из графиков можно заметить, что в несущих слоях стержня при $\omega\theta_0 < 10$ наблюдается рост значения напряжений, а при $\omega\theta_0 > 10$ изменения значений напряжений незаметно. Влияния времени действия ударной волны на нижний несущий слой незначительно, чем на верхний несущий слой.

На рис. 7 приведены графики прогиба стержня при переходе с трехслойного стержня (0,0436) на двухслойный (0,0457) и однородный стержень (0,0397) при $P = 0.5$ МПа.

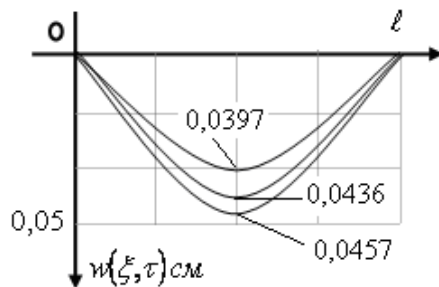


Рис. 7. Графики прогиба стержня при переходе с трехслойного стержня на двухслойный и однородный стержень

Проведены также расчеты при различных значениях упругих характеристик несущих слоев стержня. При изменении толщины заполнителя от 1 до 2 см коэффициент динамичности изменяется от 1.0016 до 1.3358, а прогиб стержня от 0.1881 до 0.0856 см. При изменении толщины верхнего несущего слоя от 0.1 до 0.2 см коэффициент динамичности изменяется от 1.3933 до 1.2954, а прогиб стержня от 0.1879 до 0.0815 см.

При изменении толщины нижнего несущего слоя от 0.1 до 0.2 см коэффициент динамичности изменяется от 1.2292 до 1.3359, а прогиб стержня от 0.1326 до 0.0856 см.

При изменении модуля упругости верхнего несущего слоя от 10^3 до 10^5 МПа коэффициент динамичности увеличивается от 0.7071 до 1.4216, а прогиб стержня уменьшается от 1.0920 до 0.1031 см.

При изменении модуля упругости нижнего несущего слоя от 10^3 до 10^5 МПа коэффициент динамичности увеличивается от 0.4631 до 0.7869, а прогиб стержня уменьшается от 0.7235 до 0.0706 см.

Установлено, что при значениях меньше десяти безразмерного параметра, зависящего от времени действия нагрузки и приведенной частоты стержня, наблюдается возрастание значений коэффициента динамичности прогиба, а при больше десяти — наблюдается слабые изменения с приближением к двум.

При увеличении модуля упругости заполнителя до значения 0.05 части модуля упругости верхнего несущего слоя, изменения коэффициента динамичности и прогиба стержня незначительно, а далее наблюдается заметное уменьшение значений коэффициента динамичности и прогиба стержня. При увеличении модуля сдвига заполнителя наблюдается малое изменение коэффициента динамичности на увеличение и малый экспоненциальный спад амплитуды прогиба.

Список литературы / References

1. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 170 с.
2. Попов Н.Н., Расторгуев Б.С., Забегаев А.А. Расчет конструкций на динамические специальные нагрузки. М.: Высшая школа, 1992. 329 с.
3. Журавков М.А., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Нелинейное деформирование трехслойного металлополимерного стержня локальными нагрузками. Полномерные материалы и технологии. Т. 2, 2016. № 1. С. 68–74.
4. Сницарь М.А., Самедов А.М. Расчет балки подземного сооружения теплотрассы при импульсно-статической нагрузке в упругой стадии. Международный научно-исследовательский журнал, 2015. Выпуск 9 (40). Часть 2. Стр. 88-91.
5. Леоненко Д.В. Деформирование трехслойного стержня гармонической параболической нагрузкой. Строительство и восстановление искусственных сооружений: матер. V Междунар. научно-практ. конф. Гомель, 21-22 апреля 2016 г. Гомель: БелГУТ, 2016. С. 86–90.